

Plaquette 1 - De la suite géométrique à la fonction $x \mapsto a^x$

Fonctions exponentielles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto a^x$ prolonge à tous les réels la suite géométrique (a^n) : pour x entier, a^x est le terme de rang x .

Valeurs remarquables.

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Allure de la courbe. Toutes les courbes passent par le point $(0; 1)$ et restent au-dessus de l'axe des abscisses ($a^x > 0$).

Valeur de a	Fonction $x \mapsto a^x$
$a > 1$	strictement croissante
$0 < a < 1$	strictement décroissante
$a = 1$	constante, égale à 1

Modèle d'évolution. Une grandeur qui augmente de $t\%$ par période vaut, après x périodes (même non entier) :

$$V(x) = V_0 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^x$$

À la calculatrice. La touche puissance (^) accepte les exposants décimaux et négatifs : $1,05 \wedge 2,5$.

Correction de l'exercice 1 - Des puissances entières

a) On calcule les puissances successives de 1,05 :

$$u_0 = 1,05^0 = 1 \quad u_1 = 1,05 \quad u_2 = 1,05^2 = 1,1025$$

$$u_3 = 1,05^3 \approx 1,1576 \text{ et } u_4 = 1,05^4 \approx 1,2155.$$

b) On passe d'un terme au suivant en multipliant par 1,05 : (u_n) est une suite **géométrique** de premier terme 1 et de raison 1,05.

Après 4 ans, le prix a augmenté d'environ 21,55 %. La fonction $x \mapsto 1,05^x$ va permettre de calculer ce coefficient pour n'importe quelle durée, par exemple 2,5 ans.

Réponse. a) 1 ; 1,05 ; 1,1025 ; $\approx 1,1576$; $\approx 1,2155$ — b) géométrique de raison 1,05.

Correction de l'exercice 2 - Un placement de deux ans et demi

a) On remplace x par la durée en années :

$$C(2,5) = 1000 \times 1,05^{2,5} \approx 1129,73 \text{ €}$$

Six mois correspondent à $x = 0,5$: $C(0,5) = 1000 \times 1,05^{0,5} \approx 1024,70 \text{ €}$.

b) $C(2) = 1000 \times 1,1025 = 1102,50 \text{ €}$ et $C(3) \approx 1157,63 \text{ €}$. On a bien $1102,50 < 1129,73 < 1157,63$: la fonction $x \mapsto 1,05^x$ « remplit » l'intervalle entre deux termes de la suite géométrique.

Remarque : après 6 mois, le gain (24,70 €) est un peu inférieur à la moitié du gain annuel (25 €), car les intérêts sont composés.

Réponse. a) environ 1129,73 € et 1024,70 € — b) $1102,50 < 1129,73 < 1157,63$.

Correction de l'exercice 3 - L'exposant un demi

a) La calculatrice donne $4^{0,5} = 2$ et $9^{0,5} = 3$: ce sont les racines carrées de 4 et de 9.

b) $2^{0,5} \approx 1,4142$, c'est-à-dire $\sqrt{2}$.

c) Les propriétés des puissances s'étendent aux exposants réels :

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \times 2} = a^1 = a$$

Le nombre positif $a^{\frac{1}{2}}$ a donc pour carré a : c'est la racine carrée de a . De même, $a^{\frac{1}{3}}$ est le nombre dont le cube vaut a : par exemple $8^{\frac{1}{3}} = 2$, car $2^3 = 8$.

Réponse. a) 2 et 3 — b) $\approx 1,4142 = \sqrt{2}$ — c) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$.

Correction de l'exercice 4 - Des exposants négatifs

On utilise la règle

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

a) $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$ et $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$.

b) $1,25^{-1} = \frac{1}{1,25} = 0,8$.

c) $0,8^{-2} = \frac{1}{0,8^2} = \frac{1}{0,64} = 1,5625$.

Interprétation : 1,25 est le coefficient d'une hausse de 25 %, et $1,25^{-1} = 0,8$ celui de l'évolution réciproque, une baisse de 20 %. L'exposant -1 « remonte » d'une période dans le temps.

Réponse. a) 0,5 et 0,125 — b) 0,8 (réciproque d'une hausse de 25 %) — c) 1,5625.

Correction de l'exercice 5 - Tableau de valeurs d'une fonction croissante

a) À la calculatrice :

x	-2	-1	0	1	2	3
$1,2^x$	0,694	0,833	1	1,2	1,44	1,728

b) Les valeurs augmentent avec x : comme $a = 1,2 > 1$, la fonction f est **strictement croissante**. Toutes les valeurs sont strictement positives, y compris pour x négatif : la courbe reste **au-dessus** de l'axe des abscisses, et passe par le point (0 ; 1).

On remarque que $f(-1) = \frac{1}{1,2} \approx 0,833$: à gauche de 0, la courbe se rapproche de l'axe des abscisses sans le toucher.

Réponse. a) 0,694 ; 0,833 ; 1 ; 1,2 ; 1,44 ; 1,728 — b) croissante, courbe au-dessus de l'axe.

Correction de l'exercice 6 - Tableau de valeurs d'une fonction décroissante

a) Avec $0,5 = \frac{1}{2}$:

$$g(-2) = 0,5^{-2} = \frac{1}{0,25} = 4 \quad g(-1) = 2 \quad g(0) = 1$$

$g(1) = 0,5$, $g(2) = 0,25$ et $g(3) = 0,125$.

b) Les valeurs diminuent quand x augmente : comme $0 < 0,5 < 1$, g est **strictement décroissante**.

Comme $0,5^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$, on a $g(x) = f(-x)$: les courbes de g et de f sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Par exemple $g(-2) = f(2) = 4$.

Réponse. a) 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125 — b) décroissante ; $g(x) = 2^{-x}$.

Correction de l'exercice 7 - Un capital après un an et demi

a) Une hausse de 3 % par an correspond au coefficient 1,03 ; après x années :

$$C(x) = 1500 \times 1,03^x$$

b) Un an et six mois font $x = 1,5$: $C(1,5) = 1500 \times 1,03^{1,5} \approx 1568,00$ €.

Quatre ans et six mois font $x = 4,5$: $C(4,5) = 1500 \times 1,03^{4,5} \approx 1713,40$ €.

Il faut convertir les mois en fraction d'année avant de calculer : six mois font 0,5 an, trois mois 0,25 an.

Réponse. a) $C(x) = 1500 \times 1,03^x$ — b) environ 1568,00 € et 1713,40 €.

Correction de l'exercice 8 - Une valeur qui baisse

a) $V(3) = 0,9^3 = 0,729$: après 3 ans, le matériel ne vaut plus que 72,9 % de sa valeur initiale.

$$V(3,5) = 0,9^{3,5} \approx 0,6916$$

Après trois ans et demi, il en conserve environ 69,2 %.

b) La base $a = 0,9$ vérifie $0 < a < 1$: la fonction $x \mapsto 0,9^x$ est strictement décroissante. C'est cohérent avec une perte de valeur continue au fil du temps.

Réponse. a) 0,729 et $\approx 0,6916$ — b) base comprise entre 0 et 1.

Correction de l'exercice 9 - Le point commun à toutes les courbes

Pour tout $a > 0$, on a

$$a^0 = 1$$

donc toutes les courbes passent par le point $(0 ; 1)$. De plus $a^1 = a$: la courbe de $x \mapsto a^x$ passe aussi par le point $(1 ; a)$, ce qui permet de lire la base sur le graphique.

Pour le modèle $V(x) = V_0 \times 1,1^x$: $V(0) = V_0 \times 1 = V_0$, la valeur de départ, et $V(1) = 1,1 V_0$, la valeur après une période, augmentée de 10 %.

Réponse. Le point $(0 ; 1)$; $a^1 = a$; $V(0) = V_0$ et $V(1) = 1,1 V_0$.

Correction de l'exercice 10 - Une voiture qui se déprécie

Perdre 15 % par an, c'est multiplier la valeur par 0,85 chaque année. Après x années, la valeur est

$$V(x) = 5000 \times 0,85^x$$

Deux ans et six mois correspondent à $x = 2,5$:

$$V(2,5) = 5000 \times 0,85^{2,5} \approx 3330,56 \text{ €}.$$

Contrôle : entre $V(2) = 3612,50 \text{ €}$ et $V(3) \approx 3070,62 \text{ €}$, ce qui est cohérent. Ce modèle suppose une décote régulière ; en réalité, une voiture perd souvent davantage la première année.

Réponse. Environ 3330,56 €.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux fonctions

a) $f(2) = 1,3^2 = 1,69$ et $g(2) = 0,7^2 = 0,49$.

$$f(-2) = \frac{1}{1,69} \approx 0,59 \quad g(-2) = \frac{1}{0,49} \approx 2,04$$

b) En $x = 0$, les deux fonctions valent 1. Pour $x > 0$, f (croissante, base $1,3 > 1$) dépasse 1 et g (décroissante, base $0,7 < 1$) passe sous 1 : $f(x) > g(x)$. Pour $x < 0$, c'est l'inverse.

On conjecture que $f(x) > g(x)$ pour $x > 0$ et $f(x) < g(x)$ pour $x < 0$, les courbes se coupant en $(0; 1)$.

Réponse. a) 1,69 ; 0,49 ; $\approx 0,59$; $\approx 2,04$ — b) pour $x > 0$.

Correction de l'exercice 12 - Associer courbes et fonctions

On utilise le sens de variation et le point d'abscisse 1, puisque $a^1 = a$.

- g a pour base $0,5 < 1$: c'est la seule fonction décroissante, représentée par C_2 .
- f et h sont croissantes ; en $x = 1$, elles valent 2 et 1,5. La courbe qui passe par $(1; 2)$ est C_1 , celle qui passe par $(1; 1,5)$ est C_3 .

Contrôle en $x = 3$: $f(3) = 8$, valeur la plus haute du graphique, et $h(3) = 3,375$.

$$2^3 = 8 \quad 1,5^3 = 3,375$$

Plus la base est grande (au-dessus de 1), plus la croissance est rapide.

Réponse. $f \rightarrow C_1$, $g \rightarrow C_2$, $h \rightarrow C_3$.

Correction de l'exercice 13 - Calculs avec la base 3

On applique les règles des puissances :

$$3^2 = 9 \quad 3^0 = 1 \quad 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

et $3^{0,5} = \sqrt{3} \approx 1,7321$.

La fonction $x \mapsto 3^x$ est strictement croissante (base $3 > 1$) : les nombres sont dans le même ordre que les exposants, $-2 < -1 < 0 < 0,5 < 2$, donc

$$3^{-2} < 3^{-1} < 3^0 < 3^{0,5} < 3^2, \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{9} < \frac{1}{3} < 1 < \sqrt{3} < 9.$$

Réponse. $\frac{1}{9} < \frac{1}{3} < 1 < \sqrt{3} \approx 1,7321 < 9$.

Correction de l'exercice 14 - Une culture de bactéries

a) On remplace t par la durée en heures :

$$N(0,5) = 200 \times 1,5^{0,5} \approx 244,95$$

soit environ 245 bactéries au bout d'une demi-heure. $N(1,5) = 200 \times 1,5^{1,5} \approx 367,42$, soit environ 367 bactéries après une heure et demie.

b) $N(3) = 200 \times 1,5^3 = 200 \times 3,375 = 675$ bactéries.

Le modèle donne des nombres décimaux ; on arrondit à l'unité, puisqu'on compte des bactéries.

Réponse. a) environ 245 et 367 bactéries — b) 675.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un capital placé

a) À la calculatrice :

t	0	0,5	1	2,25	3
$C(t)$	8000	8158,43	8320	8738,06	8998,91

b) $C(t) = k \times a^t$ avec $k = 8000 > 0$ et $a = 1,04 > 1$: $t \mapsto 1,04^t$ est strictement croissante, et la multiplier par un nombre positif conserve le sens de variation. C est **strictement croissante**.

c) Trois mois font 0,25 an :

$$C(0,25) = 8000 \times 1,04^{0,25} \approx 8078,83$$

Les trois premiers mois rapportent environ 78,83 €.

Réponse. a) 8000 ; 8158,43 ; 8320 ; 8738,06 ; 8998,91 — b) croissante — c) environ 78,83 €.