

Plaquette 4 – Taux d'évolution moyen

Fonctions exponentielles – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taux moyen sur n périodes. Si une grandeur a été multipliée par CM_{global} en n périodes, le taux moyen t_m est le taux constant qui, répété n fois, donne la même évolution :

$$(1 + t_m)^n = CM_{\text{global}} \quad \text{donc} \quad 1 + t_m = (CM_{\text{global}})^{\frac{1}{n}}$$

Conversion de taux. Un taux annuel t_a et un taux mensuel t_m sont équivalents lorsque $(1 + t_m)^{12} = 1 + t_a$.

Moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b : $\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}}$. Le coefficient moyen de deux évolutions est la moyenne géométrique de leurs coefficients.

△ Le taux moyen n'est **pas** la moyenne des taux : +20 % puis –20 % donnent un coefficient moyen $\sqrt{1,2 \times 0,8} \approx 0,98$, soit environ –2 % par période, et non 0 %.

À la calculatrice. $1,5^{\frac{1}{4}}$ se tape $1,5 \wedge (1 / 4)$ ou $1,5 \wedge 0,25$.

Correction de l'exercice 1 – Taux moyen sur deux ans

Le coefficient global sur deux ans est 1,21. On cherche le taux annuel constant t_m qui, appliqué deux fois, donne ce coefficient :

$$(1 + t_m)^2 = 1,21 \Leftrightarrow 1 + t_m = 1,21^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1,21} = 1,1$$

Le taux annuel moyen est de 10 %.

Contrôle : $1,1^2 = 1,21$. Diviser 21 % par 2 donnerait 10,5 %, ce qui est faux : $1,105^2 \approx 1,221$, soit +22,1 %.

Réponse. 10 % par an.

Correction de l'exercice 2 – Taux moyen sur trois ans

On applique la formule du taux moyen avec $n = 3$:

$$1 + t_m = 1,331^{\frac{1}{3}}$$

À la calculatrice, $1,331^{\frac{1}{3}} = 1,1$: le taux annuel moyen est de 10 %.

Contrôle : $1,1^3 = 1,1 \times 1,1 \times 1,1 = 1,331$. Trois hausses successives de 10 % donnent bien une hausse globale de 33,1 %, et non de 30 %.

Réponse. 10 % par an.

Correction de l'exercice 3 – Une hausse de 50 % en quatre ans

Le coefficient global est 1,5, sur $n = 4$ ans :

$$1 + t_m = 1,5^{\frac{1}{4}} \approx 1,10668$$

Le taux annuel moyen est d'environ 10,67 %.

Il est inférieur à $\frac{50}{4} = 12,5\%$, car les hausses se composent : quatre hausses de $12,5\%$ donneraient $1,125^4 \approx 1,6018$, soit $+60\%$. Le taux moyen est toujours inférieur au taux global divisé par le nombre de périodes, pour une hausse.

Réponse. Environ $10,67\%$ par an.

Correction de l'exercice 4 - Une baisse moyenne

Une baisse de 36% correspond au coefficient global $0,64$. Sur deux ans :

$$1 + t_m = 0,64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

donc $t_m = 0,8 - 1 = -0,2$: le nombre d'abonnés a baissé en moyenne de 20% par an.

Contrôle : $0,8 \times 0,8 = 0,64$. Pour une baisse, le taux moyen (20%) est plus fort en valeur absolue que la moitié du taux global (18%).

Réponse. -20% par an.

Correction de l'exercice 5 - Un taux mensuel équivalent

On cherche t_m tel que douze hausses mensuelles équivalent à une hausse annuelle de 12% :

$$(1 + t_m)^{12} = 1,12 \Leftrightarrow 1 + t_m = 1,12^{\frac{1}{12}} \approx 1,009489$$

Le taux mensuel équivalent est d'environ $0,95\%$.

Il est inférieur à $\frac{12}{12} = 1\%$: un taux de 1% par mois donnerait $1,01^{12} \approx 1,1268$, soit $12,68\%$ par an.

Réponse. Environ $0,95\%$ par mois.

Correction de l'exercice 6 - Un taux annuel équivalent

Douze hausses mensuelles de 1% multiplient le capital par

$$1,01^{12} \approx 1,1268$$

Le taux annuel équivalent est d'environ $12,68\%$, plus que $12 \times 1 = 12\%$: chaque mois, les intérêts des mois précédents rapportent eux aussi.

C'est le phénomène inverse de l'exercice précédent : on passe ici du mensuel à l'annuel en élevant à la puissance 12, et de l'annuel au mensuel avec l'exposant $\frac{1}{12}$.

Réponse. Environ $12,68\%$ par an.

Correction de l'exercice 7 - Trois évolutions différentes

a) On multiplie les coefficients :

$$CM_{\text{global}} = 1,1 \times 0,95 \times 1,2 = 1,254$$

soit une hausse globale de $25,4\%$.

b) Sur $n = 3$ ans : $1 + t_m = 1,254^{\frac{1}{3}} \approx 1,0784$, soit un taux annuel moyen d'environ $7,84\%$.

Le taux moyen résume la période : trois hausses de $7,84\%$ auraient donné le même résultat final. Il est inférieur à la moyenne des taux, $\frac{10 - 5 + 20}{3} \approx 8,33\%$.

Réponse. a) $1,254$ — b) environ $7,84\%$ par an.

Correction de l'exercice 8 – La croissance d'une commune

Le coefficient global est $\frac{28\,000}{25\,000} = 1,12$. Sur 5 ans :

$$1 + t_m = 1,12^{\frac{1}{5}} = 1,12^{0,2} \approx 1,02292$$

La population a augmenté en moyenne d'environ 2,29 % par an.

Contrôle : $25\,000 \times 1,02292^5 \approx 28\,000$. Ce taux moyen ne dit rien des variations d'une année à l'autre : la commune a pu gagner beaucoup d'habitants une année et peu les suivantes.

Réponse. Environ 2,29 % par an.

Correction de l'exercice 9 – Un taux trimestriel

Une année compte quatre trimestres. On cherche t tel que $(1 + t)^4 = 1,08$:

$$1 + t = 1,08^{\frac{1}{4}} = 1,08^{0,25} \approx 1,01943$$

Le taux trimestriel équivalent est d'environ 1,94 %, un peu moins que $\frac{8}{4} = 2$ %.

Contrôle : $1,01943^4 \approx 1,08$.

Réponse. Environ 1,94 % par trimestre.

Correction de l'exercice 10 – Moyenne géométrique ou moyenne arithmétique ?

a) Les coefficients sont 1,2 et 0,8. Leur moyenne géométrique est

$$\sqrt{1,2 \times 0,8} = \sqrt{0,96} \approx 0,9798$$

soit une baisse moyenne d'environ 2,02 % par an.

b) La moyenne arithmétique des taux, $\frac{20 + (-20)}{2} = 0$ %, laisserait croire que l'action a retrouvé sa valeur. En réalité, $1,2 \times 0,8 = 0,96$: l'action a perdu 4 % en deux ans.

Pour des évolutions successives, c'est la moyenne **géométrique** des coefficients qui convient.

Réponse. a) $\approx 0,9798$, soit environ $-2,02$ % par an — b) la moyenne des taux (0 %) est trompeuse.

Correction de l'exercice 11 – Repérer une erreur

L'erreur. Le journaliste a divisé le taux global par le nombre d'années, comme si les hausses s'additionnaient. Or elles se composent : cinq hausses de 5 % donnent $1,05^5 \approx 1,2763$, soit +27,6 %, et non +25 %.

La correction.

$$1 + t_m = 1,25^{\frac{1}{5}} \approx 1,0456$$

Les loyers ont augmenté en moyenne d'environ 4,56 % par an, un peu moins que les 5 % annoncés.

Réponse. Environ 4,56 % par an, et non 5 %.

Correction de l'exercice 12 - Taux moyen et prévision

a) De 2020 à 2024, il y a 4 évolutions annuelles. Le coefficient global est $\frac{219\,615}{150\,000} = 1,4641$:

$$1 + t_m = 1,4641^{\frac{1}{4}} = 1,1$$

soit 10 % par an en moyenne.

b) De 2024 à 2026, deux années de plus : $219\,615 \times 1,1^2 \approx 265\,734,15$ €.

Cette prévision suppose que la croissance moyenne passée continue. Il faut aussi compter les évolutions, pas les années : de 2020 à 2024, il y en a 4 et non 5.

Réponse. a) 10 % par an — b) environ 265 734 €.

Correction de l'exercice 13 - Doubler en dix ans

Doubler correspond au coefficient global 2 en 10 périodes :

$$(1 + t)^{10} = 2 \Leftrightarrow 1 + t = 2^{\frac{1}{10}} = 2^{0,1} \approx 1,0718$$

Il faut un taux d'environ 7,18 % par an.

On retrouve la « règle de 72 » des banquiers : un capital double en environ $\frac{72}{t}$ ans lorsque le taux annuel vaut t %, ici $\frac{72}{7,18} \approx 10$ ans.

Réponse. Environ 7,18 % par an.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux placements

Placement A : en 5 ans, le capital est multiplié par $1,04^5 \approx 1,2167$, soit +21,67 %.

Placement B : le coefficient global est 1,22, d'où un taux annuel moyen

$$1 + t_m = 1,22^{\frac{1}{5}} \approx 1,04057$$

soit environ 4,06 % par an.

Le placement B est légèrement plus intéressant : +22 % contre +21,67 % en cinq ans, ce qui correspond à 4,06 % par an au lieu de 4 %.

Réponse. B : environ 4,06 % par an contre 4 % pour A.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : salaire et inflation

a) $CM_{\text{prix}} = 1,021 \times 1,052 \times 1,049 \times 1,02 \approx 1,1493$, soit +14,93 %. Le taux moyen vaut

$$1,1493^{\frac{1}{4}} \approx 1,0354$$

soit environ 3,54 % par an.

b) Pour conserver son pouvoir d'achat, le salaire aurait dû suivre les prix : $2400 \times 1,1493 \approx 2758,22$ €.

c) Coefficient du salaire : $\frac{2600}{2400} \approx 1,0833$, d'où un taux moyen d'environ $1,0833^{0,25} \approx 1,0202$, soit 2,02 % par an. Le salaire a augmenté moins vite que les prix (2,02 % contre 3,54 %) : le pouvoir d'achat a **baissé**.

Réponse. a) $\approx 1,1493$, $\approx 3,54$ % par an — b) $\approx 2758,22$ € — c) $\approx 2,02$ % par an : pouvoir d'achat en baisse.