

Plaquette 3 - Sens de variation des fonctions $k \cdot a^x$

Fonctions exponentielles — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Déterminer le sens de variation d'une fonction $x \mapsto k \times a^x$ selon la base a et le signe de k , sans calcul de dérivée, puis s'en servir pour comparer des nombres, dresser un tableau de variations, lire une courbe et choisir un modèle de croissance ou de décroissance.

Exercice 1 - Croissante ou décroissante ?

Donner le sens de variation de chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

- a) $f(x) = 1,3^x$
- b) $g(x) = 0,8^x$
- c) $h(x) = 1^x$
- d) $k(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$

Exercice 2 - Le rôle du coefficient k

Donner le sens de variation de :

- a) $f(x) = 500 \times 1,1^x$
- b) $g(x) = -2 \times 1,5^x$
- c) $h(x) = 3 \times 0,6^x$
- d) $m(x) = -4 \times 0,5^x$

Exercice 3 - Comparer sans calculatrice

Comparer, sans calculatrice :

- a) $1,2^3$ et $1,2^5$;
- b) $0,7^2$ et $0,7^4$;
- c) 3^{-1} et $3^{0,5}$.

Exercice 4 - Choisir un modèle

Associer chaque situation à l'une des fonctions $f(x) = 1500 \times 1,04^x$, $g(x) = 1500 \times 0,96^x$ et $h(x) = 1500 \times 1,4^x$, où x est le nombre d'années.

- a) Une ville de 1500 habitants perd 4 % de sa population chaque année.
- b) Un placement de 1500 € rapporte 4 % par an.
- c) Le nombre d'abonnés d'une application, 1500 au départ, augmente de 40 % par an.

Exercice 5 - Un tableau de variations

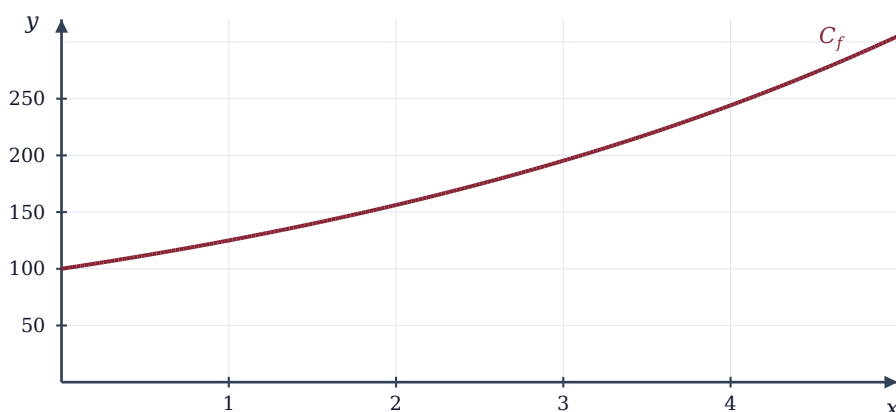
Soit $f(x) = 200 \times 0,9^x$ sur $[0; 10]$, la valeur (en milliers d'euros) d'un équipement après x années.

- Déterminer le sens de variation de f .
- Dresser son tableau de variations, avec les valeurs aux bornes arrondies au centième.

Exercice 6 - Lire une courbe exponentielle

Les ventes d'un produit sont modélisées par $f(x) = 100 \times 1,25^x$ (en centaines d'unités), où x est le nombre d'années.

- Lire graphiquement au bout de combien de temps les ventes doublent.
- Vérifier par le calcul avec $f(3)$ et $f(3,2)$.



Courbe de $f(x) = 100 \times 1,25^x$ (ventes en centaines d'unités, x en années).

Exercice 7 - Comparer deux bases

Deux placements rapportent 2 % et 5 % par an : $f(x) = 1,02^x$ et $g(x) = 1,05^x$ (coefficients après x années).

- Calculer $f(10)$ et $g(10)$.
- Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x > 0$, puis pour $x < 0$.

Exercice 8 - Encadrer une solution

On cherche les réels x tels que $1,5^x > 3$.

- Calculer $1,5^{2,7}$ et $1,5^{2,8}$, puis $1,5^{2,71}$.
- En déduire, avec le sens de variation, l'ensemble des solutions, à 0,01 près.

Exercice 9 - Un médicament qui s'élimine

Après une injection de 80 mg, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 % par heure : $Q(t) = 80 \times 0,7^t$, t en heures.

- Justifier que Q est décroissante.
- Calculer la quantité restante après 2 h 30 min, puis après 4 h.
- À partir de quelle heure entière reste-t-il moins de 10 mg ?

Exercice 10 - Un modèle qui plafonne

Les ventes cumulées d'un nouveau produit (en milliers) sont modélisées par $V(x) = 1000 - 600 \times 0,8^x$, x en mois.

- Calculer $V(0)$, $V(5)$ et $V(10)$.
- Justifier que V est croissante.
- Les ventes peuvent-elles dépasser 1000 milliers ?

Exercice 11 - Le signe d'une fonction $k \cdot a^x$

Sans calcul, donner le signe de $f(x) = -5 \times 1,2^x$ et de $g(x) = 7 \times 0,3^x$ pour tout réel x . La courbe de f peut-elle couper l'axe des abscisses ?

Exercice 12 - Repérer une erreur

Un élève affirme : « $f(x) = -3 \times 2^x$ est croissante, car $2 > 1$ ». Corriger, en calculant $f(0)$ et $f(1)$.

Exercice 13 - Un modèle de croissance à choisir

Une entreprise prévoit ses ventes annuelles $V(x)$ (en milliers d'unités) avec $V(x) = 40 \times a^x$, où x est le nombre d'années. En $x = 1$, les ventes valent 46 milliers.

- Déterminer a et interpréter.
- Justifier le sens de variation de V .

Exercice 14 - Positions de deux courbes

Soit $f(x) = 1,1^x$. Montrer que $f(x) > 1$ pour $x > 0$ et $f(x) < 1$ pour $x < 0$. Interpréter pour un capital placé à 10 % par an.

Exercice 15 - Synthèse : deux salaires

Deux salariés ont aujourd'hui des salaires mensuels de 2000 € et 2600 €. Le premier est augmenté de 6 % par an, le second de 3 % : $f(t) = 2000 \times 1,06^t$ et $g(t) = 2600 \times 1,03^t$.

- Justifier que f et g sont croissantes.
- Calculer $f(t)$ et $g(t)$ pour $t = 8, 9$ et 10 .
- À partir de quelle année entière le premier salaire dépasse-t-il le second ?