MATHÉMATIQUES

Fonctions exponentielles

Terminale STMG

Fonction $x \mapsto a^x$ • Suite géométrique • Évolution relative constante
Sens de variation • Propriétés algébriques • Taux
d'évolution moyen • Racine n-ième

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027 ; la partie « Analyse » reprend celle du programme de 2019), partie « Analyse », section « Fonctions exponentielles ». Il couvre :

- la fonction $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$, prolongement de la suite géométrique (a^n) aux réels positifs, puis à $\mathbb{R}$ avec $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$: modèle continu d'évolution relative constante ;
- sens de variation et allure de la courbe selon a ; variations de $x \mapsto ka^x$;
- propriétés algébriques $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $a^{nx} = (a^x)^n$;
- exposant $\frac{1}{n}$ et taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions successives ;
- **algorithme** : intercaler un point par moyennes arithmétique et géométrique.

Objectif : prolonger les suites géométriques par les fonctions $x \mapsto a^x$, connaître leurs variations et leurs propriétés algébriques, et calculer un taux d'évolution moyen.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Des suites géométriques aux fonctions exponentielles 3

2 Sens de variation 3

3 Propriétés algébriques 4

4 Taux d'évolution moyen 4

5 Algorithme : intercaler des points 5

6 Erreurs classiques 5

7 Fiche de synthèse 5

8 Exercices d'application 5

9 Corrigés des exercices 6

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Des suites géométriques aux fonctions exponentielles

Fonction exponentielle de base a

Soit $a > 0$. La suite géométrique (a^n) est définie pour les entiers ; on la prolonge à tous les réels $x \geq 0$ par une fonction $x \mapsto a^x$ dont la courbe « relie » les points $(n\,;a^n)$, puis aux réels négatifs en posant $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$. On admet que :

$$a^x > 0 \text{ pour tout réel } x, \qquad a^0 = 1, \qquad a^1 = a, \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Évolution relative constante

Quand x augmente de 1, a^x est multiplié par a : la fonction modélise une grandeur dont le **taux d'évolution** est constant, mais en temps **continu** (on peut calculer sa valeur au bout de 2,5 heures, par exemple).

Abonnés d'une application

Le nombre d'abonnés d'une application, 1 000 au départ, est multiplié par 1,5 chaque mois : $N(t) = 1\,000 \times 1{,}5^t$ (t en mois). Au bout de deux mois et demi : $N(2{,}5) = 1\,000 \times 1{,}5^{2{,}5} \approx 2\,756$ abonnés.

2. Sens de variation

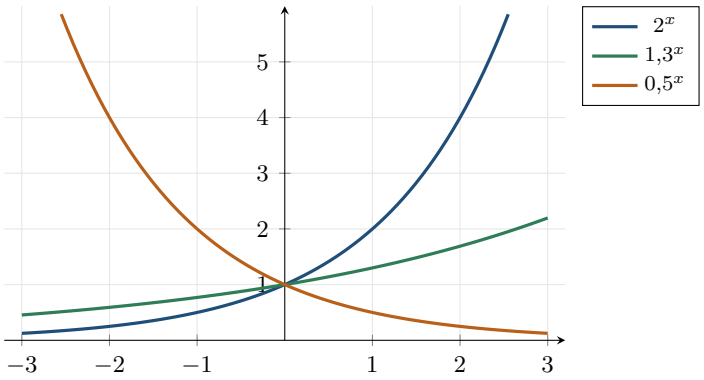
Variations de $x \mapsto a^x$

— Si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

— Si $0 < a < 1$, elle est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

— Si $a = 1$, elle est constante, égale à 1.

Comme pour les suites géométriques, c'est la position de a par rapport à 1 qui décide.



Toutes les courbes passent par $(0\,;1)$; croissantes si $a > 1$, décroissante si $a < 1$.

Fonctions $x \mapsto ka^x$

Si $k > 0$, $x \mapsto ka^x$ a le même sens de variation que $x \mapsto a^x$; si $k < 0$, le sens contraire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f(x) = -3 \times 0{,}8^x$: $0{,}8 < 1$, donc $x \mapsto 0{,}8^x$ est décroissante ; $k = -3 < 0$, donc f est croissante.

3. Propriétés algébriques

Règles de calcul (admises)

Pour $a > 0$, x et y réels, n entier relatif :

$$\boxed{a^{x+y} = a^x \times a^y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad a^{nx} = (a^x)^n$$

Ce sont les règles des puissances entières, étendues aux exposants réels.

$\dfrac{2^3 \times 2^{1,5}}{2^{0,5}} = 2^{3+1,5-0,5} = 2^4 = 16$; $\left(5^{0,25}\right)^4 = 5^1 = 5$.

4. Taux d'évolution moyen

Racine n-ième

Pour $b > 0$ et n entier non nul, $b^{\frac{1}{n}}$ est l'unique réel positif dont la puissance n-ième vaut b : $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = b$.

Taux moyen équivalent à n évolutions

Si n évolutions successives ont un coefficient multiplicateur global CM, le coefficient moyen est $CM^{\frac{1}{n}}$, et le **taux moyen** est

$$\boxed{t_m = CM^{\frac{1}{n}} - 1}$$

— Une production augmente de 20 % en 5 ans : $1{,}2^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}037\,1$, soit une hausse moyenne d'environ 3,71 % par an (et non 4 %).

— Un taux annuel de 6 % équivaut à un taux mensuel de $1{,}06^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}487\,\%$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Algorithme : intercaler des points

Moyenne arithmétique des abscisses, géométrique des ordonnées

Entre les points $(x_1\,;a^{x_1})$ et $(x_2\,;a^{x_2})$ de la courbe, le point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ a pour ordonnée $\sqrt{a^{x_1}\times a^{x_2}}$, la **moyenne géométrique** des ordonnées. En répétant, on construit autant de points que l'on veut.

```python
from math import sqrt

def intercaler(points):
    nouveaux = [points[0]]
    for k in range(len(points) - 1):
        (x1, y1), (x2, y2) = points[k], points[k + 1]
        nouveaux.append(((x1 + x2) / 2, sqrt(y1 * y2)))
        nouveaux.append((x2, y2))
    return nouveaux

print(intercaler([(0, 1), (1, 2)]))   # [(0, 1), (0.5, 1.414...), (1, 2)]
```

On retrouve $2^{0,5}=\sqrt{2}$.

6. Erreurs classiques

À éviter

- Calculer un taux moyen en divisant le taux global par n : $20\,\% \div 5 = 4\,\%$ est faux.
- Écrire $a^x \times a^y = a^{xy}$ au lieu de a^{x+y}.
- Oublier que $k<0$ inverse le sens de variation de ka^x.
- Croire que a^x peut être négatif ou nul.

7. Fiche de synthèse

Définition	prolonge (a^n) ; $a^x>0$; $a^0=1$; $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$
Variations	$a>1$: croissante ; $0<a<1$: décroissante ; ka^x : inversé si $k<0$
Calcul	$a^{x+y}=a^x a^y$; $a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$; $a^{nx}=(a^x)^n$
Taux moyen	$t_m = CM^{\frac{1}{n}}-1$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Calculs

Simplifier $A=3^{2,5}\times 3^{1,5}$ et $B=\dfrac{10^{0,7}}{10^{-0,3}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Variations

Donner le sens de variation de $f(x) = 5 \times 1{,}02^x$ et de $g(x) = -2 \times 0{,}6^x$.

Exercice 3 – Taux moyen

Un prix augmente de 10 %, baisse de 5 %, puis augmente de 8 %. Calculer le taux d'évolution moyen sur ces trois périodes.

Exercice 4 – Concentration

La concentration d'un médicament dans le sang est $C(t) = 20 \times 0{,}7^t$ (en mg/L, t en heures). Calculer $C(1{,}5)$ et dire comment évolue C.

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $A = 3^4 = 81$; $B = 10^{0{,}7+0{,}3} = 10^1 = 10$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $1{,}02 > 1$ et $5 > 0$: f est croissante. $0{,}6 < 1$ et $-2 < 0$: g est croissante.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $CM = 1{,}1 \times 0{,}95 \times 1{,}08 = 1{,}128\,6$; $1{,}128\,6^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}041\,2$: environ +4,1 % par période.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $C(1{,}5) = 20 \times 0{,}7^{1{,}5} \approx 11{,}7$ mg/L. $0{,}7 < 1$ et $20 > 0$: C est décroissante (la concentration baisse de 30 % par heure).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).