

Plaquette 3 - Évolutions successives et taux moyen

Information chiffrée et indices — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Coefficient multiplicateur.

$$CM = 1 + t \quad V_F = V_I \times CM$$

Évolutions successives.

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n$$

$$t_{\text{global}} = CM_{\text{global}} - 1$$

Taux moyen. C'est le taux t_m qui, répété n fois, donne le même résultat :

$$(1 + t_m)^n = CM_{\text{global}} \quad 1 + t_m = (CM_{\text{global}})^{\frac{1}{n}}$$

À la calculatrice, la racine n -ième s'obtient avec la touche puissance et l'exposant $\frac{1}{n}$.

Évolution réciproque. Celle qui ramène à la valeur de départ :

$$CM' = \frac{1}{CM}$$

Évolution	Réciproque
+25 % (1,25)	-20 % (0,8)
-15 % (0,85)	$\approx +17,65\%$

Nombre de périodes. Pour atteindre un objectif k au taux t , on cherche le plus petit entier n tel que $(1 + t)^n \geq k$: on teste avec la calculatrice.

⚠ Le taux moyen n'est **pas** la moyenne des taux. Une hausse de 20 % puis une baisse de 20 % ne se compensent pas : $1,2 \times 0,8 = 0,96$, soit -4 %.

Correction de l'exercice 1 - Deux évolutions successives

a) **Premier coefficient** : $1 + 0,15$ ✓

— **Valeur** : 1,15 ✓

— **Second coefficient** : $1 - 0,08$ ✓

— **Valeur** : 0,92 ✓

— **Produit** : $1,15 \times 0,92$ ✓

— **Coefficient global** :

1,058

b) **Taux** : $1,058 - 1$ ✓

— **Décimal** : 0,058 ✓

— **Évolution** :

+5,8 %

— **Piège** : additionner $15 - 8 = 7$ ✓

— **Écart avec le vrai résultat** : 1,2 point ✓

- **Explication** : la baisse porte sur un prix déjà augmenté ✓
- **Contrôle sur un prix de 200 €** : après hausse 230 € ✓
- **Après baisse** : $230 \times 0,92$ ✓
- **Valeur** : 211,60 € ✓
- **Évolution** : $\frac{11,60}{200}$ ✓
- **Décimal** : 0,058 ✓
- **Concordance** ✓
- **Ordre inversé** : $0,92 \times 1,15$ ✓
- **Même produit** : 1,058 ✓
- **Conclusion** : l'ordre n'a pas d'importance ✓

Réponse. a) 1,058 · b) +5,8 %.

Correction de l'exercice 2 - Trois hausses identiques

- a) **Coefficient annuel** : 1,08 ✓
- **Trois années** : $1,08^3$ ✓
 - **Étape 1** : $1,08 \times 1,08 = 1,1664$ ✓
 - **Étape 2** : $1,1664 \times 1,08$ ✓
 - **Coefficient global** :
- $\approx 1,259712$

- b) **Taux** : $1,2597 - 1$ ✓
- **Hausse totale** :
- $\approx +25,97\%$
- **Piège** : $3 \times 8 = 24\%$ ✓
 - **Écart** : près de 2 points ✓
 - **Nom du phénomène** : les intérêts composés ✓

- c) **Calcul** : $750 \times 1,259712$ ✓
- **Valeur** :
- $\approx 944,78 \text{ €}$

- **Contrôle année par année, an 1** : 810 € ✓
- **An 2** : $810 \times 1,08 = 874,80 \text{ €}$ ✓
- **An 3** : $874,80 \times 1,08$ ✓
- **Valeur** : $\approx 944,78 \text{ €}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Hausse en euros** : $\approx 194,78 \text{ €}$ ✓
- **Si on avait appliqué +24 %** : 930 € ✓
- **Écart** : $\approx 14,78 \text{ €}$ ✓

Réponse. a) $\approx 1,2597$ · b) $\approx +25,97\%$ · c) $\approx 944,78 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 3 - Hausse puis baisse du même taux

- a) **Coefficients** : 1,2 et 0,8 ✓
- **Produit** : $1,2 \times 0,8$ ✓
 - **Coefficient global** : 0,96 ✓
 - **Évolution** :

–4 %

b) **Coefficients** : 1,3 et 0,7 ✓

— **Produit** : 0,91 ✓

— **Évolution** :

–9 %

c) **Coefficients** : 1,1 et 0,9 ✓

— **Produit** : 0,99 ✓

— **Évolution** : –1 % ✓

— **Constat** : on ne revient **jamais** au point de départ ✓

— **Toujours une baisse** ✓

— **Lien avec les identités remarquables** : $(1 + t)(1 - t) = 1 - t^2$ ✓

— **Contrôle pour** $t = 0,2$: $1 - 0,04 = 0,96$ ✓

— **Contrôle pour** $t = 0,3$: $1 - 0,09 = 0,91$ ✓

— **Contrôle pour** $t = 0,1$: $1 - 0,01 = 0,99$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Perte** : exactement t^2 ✓

— **Conséquence** : plus le taux est fort, plus la perte est grande ✓

— **Exemple avec** 50 % : 0,75, soit –25 % ✓

Réponse. a) –4 % · b) –9 % · c) –1 %.

Correction de l'exercice 4 - Taux moyen sur deux ans

— **Coefficient global** : 1,21 ✓

— **Équation** : $(1 + t_m)^2 = 1,21$ ✓

— **Racine carrée** : $\sqrt{1,21}$ ✓

— **Valeur** : 1,1 ✓

— **Taux moyen** :

+10 %

— **Vérification** : $1,1 \times 1,1$ ✓

— **Produit** : 1,21 ✓

— **Concordance** ✓

— **Piège** : diviser 21 par 2 ✓

— **Ce que cela donnerait** : 10,5 % ✓

— **Contrôle** : $1,105^2 \approx 1,2210$ ✓

— **Écart** : trop élevé ✓

— **Règle** : le taux moyen est toujours **inférieur** à la moyenne des taux ✓

— **Application sur** 80 k€ : après un an 88 k€ ✓

— **Après deux ans** : 96,8 k€ ✓

— **Contrôle direct** : $80 \times 1,21 = 96,8$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Autre exemple** : +32,25 % sur deux ans ✓

— **Taux moyen** : $\sqrt{1,3225} = 1,15$, soit +15 % ✓

Réponse. +10 % par an.

Correction de l'exercice 5 - Taux moyen sur cinq ans

- Coefficient global : 1,4 ✓
- Nombre de périodes : 5 ✓
- Équation : $(1 + t_m)^5 = 1,4$ ✓
- Exposant à utiliser : $\frac{1}{5}$ ✓
- Écriture : $1,4^{0,2}$ ✓
- Résultat : $\approx 1,0696$ ✓
- Taux moyen :
 $\approx +6,96\%$
- Vérification : $1,0696^5$ ✓
- Valeur : $\approx 1,3999$ ✓
- Concordance à l'arrondi près ✓
- Piège : $\frac{40}{5} = 8\%$ ✓
- Contrôle : $1,08^5 \approx 1,4693$ ✓
- Écart : $+46,9\%$ au lieu de $+40\%$ ✓
- Conclusion : 8% est nettement trop élevé ✓
- Application sur 500 unités : $500 \times 1,4 = 700$ ✓
- Contrôle par le taux moyen : $500 \times 1,0696^5$ ✓
- Valeur : ≈ 700 ✓
- Concordance ✓

Réponse. $\approx +6,96\%$ par an.

Correction de l'exercice 6 - Taux moyen d'une baisse

- Coefficient global : $1 - 0,1855$ ✓
- Valeur : 0,8145 ✓
- Équation : $(1 + t_m)^4 = 0,8145$ ✓
- Exposant : $\frac{1}{4} = 0,25$ ✓
- Écriture : $0,8145^{0,25}$ ✓
- Résultat : 0,95 ✓
- Taux moyen :
 -5% par an
- Vérification, an 1 : 0,95 ✓
- An 2 : 0,9025 ✓
- An 3 : $\approx 0,857375$ ✓
- An 4 : $\approx 0,81450625$ ✓
- Concordance ✓
- Contrôle de vraisemblance : le coefficient est inférieur à 1 ✓
- Donc le taux moyen est négatif ✓
- Piège : $\frac{-18,55}{4} \approx -4,64\%$ ✓
- Contrôle : $0,9536^4 \approx 0,8270$ ✓
- Écart : la baisse serait moindre ✓

- **Application sur 2000 clients** : $2000 \times 0,8145$ ✓
- **Valeur** : 1629 clients ✓

Réponse. -5% par an.

Correction de l'exercice 7 - Retrouver un taux manquant

- **Coefficient global** : 1,344 ✓
- **Premier coefficient** : 1,12 ✓
- **Relation** : $1,12 \times CM_2 = 1,344$ ✓
- **Isolement** : $CM_2 = \frac{1,344}{1,12}$ ✓
- **Quotient** : 1,2 ✓
- **Taux** :
+20 %
- **Vérification** : $1,12 \times 1,2$ ✓
- **Produit** : 1,344 ✓
- **Concordance** ✓
- **Piège** : $34,4 - 12 = 22,4\%$ ✓
- **Contrôle** : $1,12 \times 1,224 \approx 1,3709$ ✓
- **Écart** : trop élevé ✓
- **Contrôle sur un prix de 50 €** : après un an 56 € ✓
- **Après deux ans** : $50 \times 1,344$ ✓
- **Valeur** : 67,20 € ✓
- **Évolution de la seconde année** : $\frac{67,20 - 56}{56}$ ✓
- **Numérateur** : 11,20 ✓
- **Décimal** : 0,2 ✓
- **Concordance** ✓
- **Règle** : on **divise** les coefficients pour isoler une période ✓

Réponse. $+20\%$.

Correction de l'exercice 8 - Combien d'années ?

- **Objectif** : coefficient 1,5 ✓
- **Inéquation** : $1,06^n \geq 1,5$ ✓
- **Méthode** : tester des valeurs de n ✓
- **Pour** $n = 5$: $1,06^5 \approx 1,3382$ ✓
- **Insuffisant** ✓
- **Pour** $n = 6$: $\approx 1,4185$ ✓
- **Toujours insuffisant** ✓
- **Pour** $n = 7$: $\approx 1,5036$ ✓
- **Objectif atteint** ✓
- **Réponse** :
7 ans
- **Contrôle du sens** : la suite $1,06^n$ est croissante ✓
- **Donc** : 7 est le plus petit entier convenable ✓
- **Piège** : $\frac{50}{6} \approx 8,3$ ans ✓

- **Pourquoi c'est trop** : les intérêts se composent ✓
- **Sur un capital de 10 000 €** : après 7 ans $\approx 15\,036$ € ✓
- **Après 6 ans** : $\approx 14\,185$ € ✓
- **Confirmation** : l'objectif est franchi la septième année ✓
- **Objectif de doublement** : $n = 12$ ✓
- **Contrôle** : $1,06^{12} \approx 2,012$ ✓

Réponse. 7 ans.

Correction de l'exercice 9 - Évolution réciproque

a) **Coefficient** : 1,25 ✓

— **Réciproque** : $\frac{1}{1,25}$ ✓

— **Valeur** : 0,8 ✓

— **Taux** :

–20 %

— **Vérification** : $1,25 \times 0,8 = 1$ ✓

b) **Coefficient** : 0,85 ✓

— **Réciproque** : $\frac{1}{0,85}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,1765$ ✓

— **Taux** :

$\approx +17,65$ %

— **Vérification** : $0,85 \times 1,1765 \approx 1$ ✓

c) **Coefficient** : 1,6 ✓

— **Réciproque** : $\frac{1}{1,6}$ ✓

— **Valeur** : 0,625 ✓

— **Taux** :

–37,5 %

— **Constat général** : la réciproque n'est jamais l'opposé ✓

— **Exemple frappant** : +100 % a pour réciproque –50 % ✓

— **Application, un prix soldé –15 %** : pour revenir au prix initial ✓

— **Hausse nécessaire** : +17,65 % ✓

— **Contrôle sur 200 €** : soldé à 170 € ✓

— **Retour** : $170 \times 1,1765 \approx 200$ € ✓

Réponse. a) –20 % · b) $\approx +17,65$ % · c) –37,5 %.

Correction de l'exercice 10 - Annuler une hausse

a) **Coefficient de la hausse** : 1,12 ✓

— **Coefficient de retour** : $\frac{1}{1,12}$ ✓

— **Décimal** : $\approx 0,8929$ ✓

— **Taux** : $0,8929 - 1$ ✓

— **Remise** :

$\approx -10,71$ %

- **Piège** : accorder -12% ✓
- **Ce que cela donnerait** : $1,12 \times 0,88$ ✓
- **Produit** : $0,9856$ ✓
- **Effet** : $-1,44\%$, en dessous du prix initial ✓

b) **Prix après hausse** : $75 \times 1,12$ ✓

- **Valeur** : 84 € ✓
- **Après remise** : $84 \times 0,8929$ ✓
- **Valeur** :

$\approx 75 \text{ €}$

- **Concordance** ✓
- **Contrôle direct** : $\frac{84 - 75}{84}$ ✓
- **Numérateur** : 9 ✓
- **Décimal** : $\approx 0,1071$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Avec une remise de 12%** : $84 \times 0,88 = 73,92 \text{ €}$ ✓
- **Écart au prix initial** : $1,08 \text{ €}$ de moins ✓
- **Leçon** : remise et hausse ne se compensent pas à taux égal ✓

Réponse. a) environ $-10,71\%$ · b) $75 \rightarrow 84 \rightarrow 75 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 11 - Taux moyen contre moyenne des taux

a) **Coefficients** : $1,2$; $1,05$; $0,9$ ✓

- **Premier produit** : $1,2 \times 1,05$ ✓
- **Valeur** : $1,26$ ✓
- **Second produit** : $1,26 \times 0,9$ ✓
- **Coefficient global** :

$1,134$

- **Évolution** : $+13,4\%$ ✓

b) **Équation** : $(1 + t_m)^3 = 1,134$ ✓

- **Exposant** : $\frac{1}{3}$ ✓
- **Résultat** : $\approx 1,0428$ ✓
- **Taux moyen** :

$\approx +4,28\%$

- **Vérification** : $1,0428^3 \approx 1,134$ ✓

c) **Moyenne des taux** : $\frac{20 + 5 - 10}{3}$ ✓

- **Valeur** : 5% ✓
- **Comparaison** : $4,28 < 5$ ✓
- **Écart** : $0,72$ point ✓
- **Contrôle** : $1,05^3 \approx 1,1576$ ✓
- **Soit** : $+15,76\%$ au lieu de $+13,4\%$ ✓
- **Conclusion** : la moyenne des taux **surestime** ✓
- **Règle générale** : c'est toujours le cas ✓

— **Raison** : la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique ✓

Réponse. a) $+13,4\%$ · b) $\approx +4,28\%$ · c) la moyenne des taux (5 %) surestime.

Correction de l'exercice 12 – Un placement

a) **Coefficient annuel** : 1,03 ✓

— **Sur 8 ans** : $1,03^8$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,2668$ ✓

— **Capital** : $5000 \times 1,2668$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 6333,85 \text{ €}$$

b) **Taux global** : $1,2668 - 1$ ✓

— **Hausse** :

$$\approx +26,68\%$$

— **Piège** : $8 \times 3 = 24\%$ ✓

— **Écart** : 2,68 points ✓

— **Intérêts gagnés** : $\approx 1333,85 \text{ €}$ ✓

— **Avec des intérêts simples** : $5000 \times 0,24 = 1200 \text{ €}$ ✓

— **Gain de la capitalisation** : $\approx 133,85 \text{ €}$ ✓

c) **Objectif** : $1,03^n \geq 1,4$ ✓

— **Détail** : $\frac{7000}{5000} = 1,4$ ✓

— **Pour** $n = 11$: $\approx 1,3842$ ✓

— **Insuffisant** ✓

— **Pour** $n = 12$: $\approx 1,4258$ ✓

— **Objectif atteint** ✓

— **Réponse** :

12 ans

— **Capital correspondant** : $\approx 7128,80 \text{ €}$ ✓

Réponse. a) $\approx 6333,85 \text{ €}$ · b) $\approx +26,68\%$ · c) 12 ans.

Correction de l'exercice 13 – Repérer une erreur

— **Ce qu'il a fait** : diviser 44 par 4 ✓

— **Règle violée** : les taux ne s'additionnent pas ✓

— **Donc** : ils ne se divisent pas non plus ✓

— **Contrôle de sa réponse** : $1,11^4$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,5181$ ✓

— **Soit** : $+51,81\%$ ✓

— **Comparaison à 44 %** : nettement trop ✓

— **Méthode correcte** : $(1 + t_m)^4 = 1,44$ ✓

— **Exposant** : $\frac{1}{4}$ ✓

— **Calcul** : $1,44^{0,25}$ ✓

— **Résultat** : $\approx 1,0954$ ✓

— **Taux moyen** :

$$\approx +9,54 \%$$

- **Vérification** : $1,0954^4 \approx 1,4400$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Écart avec sa réponse** : $\approx 1,46$ point ✓
- **Sens** : il surestime toujours ✓
- **Règle à retenir** : le taux moyen est sous la moyenne arithmétique ✓
- **Cas où l'écart est faible** : taux petits et proches ✓
- **Cas où l'écart explose** : taux forts ou de signes contraires ✓

Réponse. $t_m = 1,44^{0,25} - 1 \approx +9,54 \%$, pas 11 %.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux trajectoires

a) **Entreprise A** : $1,05^4$ ✓

- **Étape** : $1,05^2 = 1,1025$ ✓
- **Puis** : $1,1025^2$ ✓
- **Coefficient** :

$$\approx 1,2155$$

- **Entreprise B, coefficients** : 1,12 ; 1 ; 1,03 ; 1,05 ✓
- **Premier produit** : $1,12 \times 1 = 1,12$ ✓
- **Puis** : $1,12 \times 1,03 = 1,1536$ ✓
- **Puis** : $1,1536 \times 1,05$ ✓
- **Coefficient** :

$$\approx 1,2113$$

b) **Comparaison** : $1,2155 > 1,2113$ ✓

- **Écart** : très faible ✓
- **Gagnante** : l'entreprise A ✓
- **Hausse de A** : $\approx +21,55 \%$ ✓
- **Hausse de B** : $\approx +21,13 \%$ ✓
- **Écart** : 0,42 point ✓

c) **Équation** : $(1 + t_m)^4 = 1,2113$ ✓

- **Exposant** : 0,25 ✓
- **Résultat** : $\approx 1,0491$ ✓
- **Taux moyen** :

$$\approx +4,91 \%$$

- **Comparaison à A** : $5 \% > 4,91 \%$ ✓
- **Cohérence avec b)** ✓
- **Leçon** : la régularité de A l'emporte de peu ✓

Réponse. a) $\approx 1,2155$ et $\approx 1,2113$ · b) A, de peu · c) $\approx +4,91 \%$.

Correction de l'exercice 15 - Doubler un capital

a) **Objectif** : $1,07^n \geq 2$ ✓

- **Pour** $n = 9$: $\approx 1,8385$ ✓
- **Insuffisant** ✓

- **Pour** $n = 10$: $\approx 1,9672$ ✓
- **Toujours insuffisant** ✓
- **Pour** $n = 11$: $\approx 2,1049$ ✓
- **Objectif atteint** ✓
- **Réponse** :

11 ans

b) **Règle des 70** : elle annonce 10 ans ✓

- **Écart** : un an ✓
- **Appréciation** : bonne approximation ✓
- **Usage** : une estimation mentale rapide ✓
- **Contrôle à 5 %, règle** : 14 ans ✓
- **Calcul exact** : $1,05^{14} \approx 1,9799$ ✓
- **Puis** $n = 15$: $\approx 2,0789$ ✓
- **Réponse exacte** : 15 ans ✓
- **Contrôle à 10 %, règle** : 7 ans ✓
- **Calcul exact** : $1,1^7 \approx 1,9487$ ✓
- **Puis** $n = 8$: $\approx 2,1436$ ✓
- **Réponse exacte** : 8 ans ✓
- **Bilan** : la règle sous-estime toujours d'un an environ ✓
- **Intérêt** : ordre de grandeur immédiat, sans calculatrice ✓

Réponse. a) 11 ans · b) la règle annonce 10 ans : bonne approximation, mais un an de moins.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : cinq ans d'activité

a) **Coefficients** : 1,18 ; 0,95 ; 1,1 ; 0,92 ; 1,12 ✓

- **Étape 1** : $1,18 \times 0,95 = 1,121$ ✓
- **Étape 2** : $1,121 \times 1,1 = 1,2331$ ✓
- **Étape 3** : $1,2331 \times 0,92 \approx 1,134452$ ✓
- **Étape 4** : $1,134452 \times 1,12$ ✓
- **Coefficient global** :

$\approx 1,27059$

- **Évolution totale** : $\approx +27,06\%$ ✓
- **Piège** : additionner $18 - 5 + 10 - 8 + 12 = 27$ ✓
- **Coïncidence trompeuse** : c'est proche, mais pas égal ✓

b) **Équation** : $(1 + t_m)^5 \approx 1,27059$ ✓

- **Exposant** : $\frac{1}{5} = 0,2$ ✓
- **Résultat** : $\approx 1,04906$ ✓
- **Taux moyen** :

$\approx +4,91\%$

- **Vérification** : $1,04906^5 \approx 1,2706$ ✓
- **Comparaison à la moyenne des taux** : $5,4\%$ ✓
- **Confirmation** : le taux moyen est plus bas ✓

c) **Calcul** : $400 \times 1,27059$ ✓

— **Valeur :**

$\approx 508,24 \text{ k€}$

— **Contrôle année par année :** 472 ; 448,4 ; 493,24 ✓

— **Puis :** $\approx 453,78$; $\approx 508,24$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Gain total :** $\approx 108,24 \text{ k€}$ ✓

Réponse. a) $\approx 1,2706$, soit $\approx +27,06 \%$ · b) $\approx +4,91 \%$ · c) $\approx 508,24 \text{ k€}$.