Plaquette 3 – Évolutions successives et taux moyen

Information chiffrée et indices — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Coefficient multiplicateur. Une évolution de $t\,\%$ correspond au coefficient $c = 1 + \dfrac{t}{100}$ (avec $t < 0$ pour une baisse).

Évolutions successives. Le coefficient global est le produit des coefficients :

$$c_{\text{global}} = c_1 \times c_2 \times \cdots \times c_n$$

Taux moyen sur n périodes : le taux constant qui donne le même coefficient global,

$$(1 + t_m)^n = c_{\text{global}} \Leftrightarrow 1 + t_m = c_{\text{global}}^{\frac{1}{n}}$$

Évolution réciproque : le coefficient $\dfrac{1}{c}$ ramène à la valeur de départ.

Seuil : pour savoir quand c^n dépasse une valeur, on calcule les puissances successives ou l'on utilise le logarithme décimal.

Correction de l'exercice 1 – Deux évolutions successives

a) Les coefficients sont 1,15 (hausse de 15 %) et 0,92 (baisse de 8 %). Ils se multiplient :

$$c = 1{,}15 \times 0{,}92 = 1{,}058$$

b) Le coefficient 1,058 correspond à une hausse globale de 5,8 %.

Ce n'est pas $15 - 8 = 7\,\%$: la baisse de 8 % s'applique à un prix déjà augmenté.

Réponse. a) 1,058 — b) +5,8 %.

Correction de l'exercice 2 – Trois hausses identiques

a) Trois hausses de 8 % font trois multiplications par 1,08 :

$$c = 1{,}08^3 \approx 1{,}2597$$

b) Le loyer a augmenté d'environ 25,97 %, un peu plus que $3 \times 8 = 24\,\%$, car chaque hausse porte sur un loyer déjà augmenté.

c) $750 \times 1{,}08^3 \approx 944{,}78$ €.

Réponse. a) ≈ 1,2597 — b) ≈ +25,97 % — c) ≈ 944,78 €.

Correction de l'exercice 3 – Hausse puis baisse du même taux

Le coefficient global vaut $(1 + t)(1 - t) = 1 - t^2$: il est toujours inférieur à 1.

a) $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$: baisse de 4 %.
b) $1{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}91$: baisse de 9 %.
c) $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$: baisse de 1 %.

$$1 - 0{,}2^2 = 0{,}96 \qquad 1 - 0{,}3^2 = 0{,}91 \qquad 1 - 0{,}1^2 = 0{,}99$$

Une hausse suivie d'une baisse de même taux ne ramène jamais au prix de départ : on termine plus bas, d'autant plus que le taux est grand.

Réponse. a) −4 % — b) −9 % — c) −1 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 4 – Taux moyen sur deux ans

Le coefficient global sur deux ans vaut 1,21. Le coefficient annuel moyen c vérifie $c^2 = 1{,}21$:

$$c = 1{,}21^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$$

Le taux annuel moyen est de 10 %, et non 10,5 %.

Vérification : deux hausses de 10 % donnent bien $1{,}1^2 = 1{,}21$.

Réponse. +10 % par an.

Correction de l’exercice 5 – Taux moyen sur cinq ans

Le coefficient global vaut 1,4. On cherche le coefficient annuel c tel que $c^5 = 1{,}4$:

$$c = 1{,}4^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}0696$$

Le taux annuel moyen est d’environ 6,96 %.

Diviser 40 % par 5 donnerait 8 %, ce qui surestime le taux : $1{,}08^5 \approx 1{,}47$, soit +47 % et non +40 %.

Réponse. ≈ +6,96 % par an.

Correction de l’exercice 6 – Taux moyen d’une baisse

Une baisse de 18,55 % correspond au coefficient $1 - 0{,}1855 = 0{,}8145$. On cherche c tel que $c^4 = 0{,}8145$:

$$c = 0{,}8145^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}95$$

L’activité a baissé en moyenne de 5 % par an.

Vérification : $0{,}95^4 \approx 0{,}8145$.

Réponse. −5 % par an.

Correction de l’exercice 7 – Retrouver un taux manquant

On note c le coefficient de la seconde année. Le coefficient global est le produit des deux :

$$1{,}12 \times c = 1{,}344 \Leftrightarrow c = \frac{1{,}344}{1{,}12} = 1{,}2$$

La seconde année, le prix a augmenté de 20 %.

Soustraire les taux ($34{,}4 - 12 = 22{,}4$ %) serait faux : on divise les coefficients.

Réponse. +20 %.

Correction de l’exercice 8 – Combien d’années ?

On cherche le plus petit entier n tel que $1{,}06^n \geq 1{,}5$. Avec le logarithme décimal :

$$n \geq \frac{\log(1{,}5)}{\log(1{,}06)} \approx 6{,}96$$

donc $n = 7$.

Vérification : $1{,}06^6 \approx 1{,}4185$ (hausse de 41,85 %) et $1{,}06^7 \approx 1{,}5036$ (hausse de 50,36 %). On peut aussi trouver ce résultat en calculant les puissances successives à la calculatrice.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 7 ans.

Correction de l’exercice 9 – Évolution réciproque

Le coefficient réciproque est l’inverse du coefficient.

a) $\frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$: baisse de 20 %.

b) $\frac{1}{0{,}85} \approx 1{,}1765$: hausse d’environ 17,65 %.

c) On calcule l’inverse :

$$\frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$$

baisse de 37,5 %. L’évolution réciproque n’a jamais le même taux que l’évolution de départ.

Réponse. a) −20 % — b) ≈ +17,65 % — c) −37,5 %.

Correction de l’exercice 10 – Annuler une hausse

a) Le coefficient réciproque vaut

$$\frac{1}{1{,}12} \approx 0{,}8929$$

soit une remise d’environ 10,71 %, et non de 12 %.

b) L’article passe à $75 \times 1{,}12 = 84$ €, puis à $84 \times \frac{1}{1{,}12} = 75$ €. Avec une remise de 12 %, il ne coûterait que $84 \times 0{,}88 = 73{,}92$ €.

Réponse. a) environ −10,71 % — b) 75 → 84 → 75 €.

Correction de l’exercice 11 – Taux moyen contre moyenne des taux

a) $1{,}2 \times 1{,}05 \times 0{,}9 = 1{,}134$: hausse globale de 13,4 %.

b) Le coefficient annuel moyen vaut

$$1{,}134^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}0428$$

soit un taux moyen d’environ 4,28 % par an.

c) La moyenne des taux, $\frac{20 + 5 - 10}{3} = 5$ %, surestime le taux moyen : trois hausses de 5 % donneraient $1{,}05^3 \approx 1{,}158$, et non 1,134.

Réponse. a) +13,4 % — b) ≈ +4,28 % — c) la moyenne des taux (5 %) surestime.

Correction de l’exercice 12 – Un placement

a) $5000 \times 1{,}03^8 \approx 6333{,}85$ €.

b) $1{,}03^8 \approx 1{,}2668$: hausse d’environ 26,68 %.

c) On cherche n tel que $1{,}03^n > \frac{7000}{5000} = 1{,}4$:

$$n > \frac{\log(1{,}4)}{\log(1{,}03)} \approx 11{,}38$$

donc au bout de 12 ans ($5000 \times 1{,}03^{11} \approx 6921{,}17$ € et $5000 \times 1{,}03^{12} \approx 7128{,}80$ €).

Réponse. a) ≈ 6333,85 € — b) ≈ +26,68 % — c) 12 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Repérer une erreur

L’élève a divisé le taux global par le nombre d’années, alors que les évolutions se composent. Le coefficient annuel moyen c vérifie $c^4 = 1{,}44$:

$$c = 1{,}44^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}0954$$

Le taux moyen annuel est d’environ 9,54 %.

Avec 11 % par an, on obtiendrait $1{,}11^4 \approx 1{,}518$, soit +51,8 % en quatre ans, bien plus que 44 %.

Réponse. $t_m = 1{,}44^{\frac{1}{4}} - 1 \approx +9{,}54\,\%$, pas 11 %.

Correction de l’exercice 14 – Comparer deux trajectoires

a) A : $1{,}05^4 \approx 1{,}2155$. B : $1{,}12 \times 1 \times 1{,}03 \times 1{,}05 \approx 1{,}2113$.

b) A a le mieux progressé, de peu : +21,55 % contre +21,13 %.

c) Le coefficient annuel moyen de B vaut

$$1{,}2113^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}0491$$

soit environ 4,91 % par an, légèrement moins que les 5 % réguliers de A. La moyenne des taux de B, 5 %, ferait croire à l’égalité.

Réponse. a) ≈ 1,2155 et ≈ 1,2113 — b) A, de peu — c) ≈ +4,91 %.

Correction de l’exercice 15 – Doubler un capital

a) On cherche le plus petit n tel que $1{,}07^n \geq 2$:

$$n \geq \frac{\log(2)}{\log(1{,}07)} \approx 10{,}24$$

donc au bout de 11 ans ($1{,}07^{10} \approx 1{,}967$ et $1{,}07^{11} \approx 2{,}105$).

b) La règle des 70 donne 10 ans : c’est une bonne approximation du temps de doublement réel (10,24 ans), mais en années entières, il faut attendre la onzième année pour que le capital ait effectivement doublé.

Réponse. a) 11 ans — b) la règle annonce 10 ans : bonne approximation, mais un an trop tôt.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : cinq ans d’activité

a) On multiplie les cinq coefficients :

$$1{,}18 \times 0{,}95 \times 1{,}10 \times 0{,}92 \times 1{,}12 \approx 1{,}2706$$

soit une hausse totale d’environ 27,06 %.

b) $1{,}2706^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}0491$: le taux moyen annuel est d’environ 4,91 %.

c) $400 \times 1{,}2706 \approx 508{,}24$ k€. Contrôle : $400 \times 1{,}0491^5 \approx 508$ k€, cohérent avec le taux moyen.

Réponse. a) ≈ 1,2706, soit ≈ +27,06 % — b) ≈ +4,91 % — c) ≈ 508,24 k€.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).