

Plaque 3 - Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Loi binomiale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli à n épreuves, $\binom{n}{k}$ (« k parmi n ») est le nombre de chemins qui comportent exactement k succès.

Valeurs immédiates. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Symétrie. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: échanger succès et échecs.

Formule de Pascal. Pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Triangle de Pascal. Chaque nombre est la somme du nombre situé au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche.

n	$k=0$	1	2	3	4	5	6
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

La somme de la ligne n vaut 2^n , le nombre total de chemins.

Correction de l'exercice 1 - Compter des chemins

Par définition, $\binom{4}{2}$ est le nombre de chemins à 2 succès parmi 4 épreuves : la liste en compte 6, donc $\binom{4}{2} = 6$.

Pour trois succès, il suffit de choisir la place de l'**unique échec** : premier, deuxième, troisième ou quatrième essai. Il y a 4 chemins :

$$\binom{4}{3} = 4$$

On remarque que $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$: choisir les trois succès revient à choisir l'échec.

Réponse. $\binom{4}{2} = 6$; $\binom{4}{3} = 4$.

Correction de l'exercice 2 - Les valeurs immédiates

- Un seul chemin ne comporte **aucun** succès : celui où l'on n'obtient que des échecs. Donc $\binom{n}{0} = 1$.
- Un seul chemin ne comporte **que** des succès, donc $\binom{n}{n} = 1$.

- Un chemin à **un** succès est déterminé par la place de ce succès, parmi n épreuves :
 $\binom{n}{1} = n$.

Pour $n = 10$:

$$\binom{10}{0} = 1 \quad \binom{10}{10} = 1 \quad \binom{10}{1} = 10$$

Réponse. 1 ; 1 ; 10.

Correction de l'exercice 3 - La symétrie

Un chemin à k succès comporte $n - k$ échecs. En échangeant les rôles de S et de $\bar{S}$, chaque chemin à k succès devient un chemin à $n - k$ succès, et inversement : il y en a autant.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ainsi $\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$ et $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$.

La symétrie se voit dans le triangle de Pascal : chaque ligne se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche.

Réponse. $\binom{10}{9} = 10$; $\binom{10}{7} = 120$.

Correction de l'exercice 4 - Construire le triangle

Chaque ligne commence et finit par 1 ; chaque autre nombre est la somme du nombre au-dessus et du nombre au-dessus à gauche.

n	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On lit à la ligne 6 :

$$\binom{6}{2} = 15 \quad \binom{6}{3} = 20$$

Réponse. $\binom{6}{2} = 15$; $\binom{6}{3} = 20$.

Correction de l'exercice 5 - La formule de Pascal

Un chemin à 2 succès sur 5 épreuves se termine :

- soit par un **succès** : les 4 premières épreuves comportent alors 1 succès, ce qui fait $\binom{4}{1}$ chemins ;

- soit par un **échec** : les 4 premières épreuves comportent alors 2 succès, ce qui fait $\binom{4}{2}$ chemins.

Les deux cas ne se recouvrent pas, donc

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$$

C'est la formule de Pascal, qui justifie la construction du triangle.

Réponse. $\binom{5}{2} = 4 + 6 = 10$.

Correction de l'exercice 6 - Prolonger jusqu'à $n = 10$

On additionne les nombres voisins de la ligne précédente, en commençant et finissant par 1.

- Ligne 9 : 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
- Ligne 10 : 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

Par exemple $\binom{10}{5} = \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 126 + 126 = 252$.

Contrôle : la somme de la ligne 10 vaut

$$1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024 = 2^{10}$$

Réponse. $\binom{10}{5} = 252$.

Correction de l'exercice 7 - La somme d'une ligne

Ligne 5 :

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$$

Chaque chemin de l'arbre comporte un certain nombre k de succès, entre 0 et n . En additionnant $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, on compte donc **tous** les chemins de l'arbre, une seule fois chacun.

Or l'arbre se divise en deux à chaque épreuve : il compte $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ chemins.

Réponse. $32 = 2^5$; la ligne n compte tous les chemins, soit 2^n .

Correction de l'exercice 8 - Trois succès sur dix

Une suite de 10 résultats à 3 ventes est un chemin à 3 succès dans un arbre à 10 épreuves. On lit la ligne 10 du triangle :

$$\binom{10}{3} = 120$$

Par symétrie, $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$: avoir 7 ventes, c'est avoir 3 échecs.

Il serait impossible de dessiner les $2^{10} = 1024$ chemins : le triangle de Pascal donne le résultat sans l'arbre.

Réponse. 120 façons dans les deux cas.

Correction de l'exercice 9 - Un chemin ou un événement

a) On multiplie le long du chemin, qui comporte 2 succès et 3 échecs :

$$0,1^2 \times 0,9^3 = 0,01 \times 0,729 = 0,00729$$

b) Tous les chemins à 2 succès ont cette probabilité, et il y en a $\binom{5}{2} = 10$:

$$P(X = 2) = 10 \times 0,00729 = 0,0729$$

L'événement « 2 succès » est dix fois plus probable qu'un chemin particulier.

Réponse. a) 0,00729 — b) 0,0729.

Correction de l'exercice 10 - Générer le triangle en Python

a) Au départ, la variable contient [1], la ligne $n = 0$. Au premier passage, la boucle intérieure ne s'exécute pas (une liste d'un élément), et l'on obtient [1, 1] : la deuxième ligne affichée est la ligne $n = 1$.

b) Chaque nouveau nombre est la somme de deux nombres voisins de la ligne précédente :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

C'est la **formule de Pascal**. Les deux 1 ajoutés au début et à la fin traduisent

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

Réponse. a) [1], puis [1, 1] — b) la formule de Pascal.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver n

a) $\binom{n}{1} = n$, donc $n = 8$.

b) On cherche dans la colonne $k = 2$ du triangle : 1, 3, 6, 10, 15... La valeur 10 apparaît à la ligne 5 :

$$\binom{5}{2} = 10 \Rightarrow n = 5$$

c) Par symétrie, $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$, donc $n = 7$.

Réponse. a) $n = 8$ — b) $n = 5$ — c) $n = 7$.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

D'après la ligne 5 du triangle, $\binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{2} = 10$. La formule de Pascal donne :

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$$

et non 12. Un coefficient binomial n'est pas un produit de n par k : c'est un nombre de chemins.

Vérification avec la symétrie de la ligne 6 : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1, de somme $64 = 2^6$.

Réponse. $\binom{6}{2} = 15$.

Correction de l'exercice 13 - Les matchs d'un tournoi

Une suite de résultats est un chemin d'un arbre à 5 épreuves (victoire ou défaite). On lit la ligne 5 du triangle : 1, 5, 10, 10, 5, 1.

— Exactement 3 victoires : $\binom{5}{3} = 10$ façons.

— Au moins 4 victoires : 4 ou 5 victoires, soit

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 5 + 1 = 6$$

façons.

Réponse. 10 façons ; 6 façons.

Correction de l'exercice 14 - Utiliser la ligne 6

Chacun des $2^6 = 64$ chemins a la probabilité $\frac{1}{64}$. On lit la ligne 6 : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

$$P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3}}{64} = \frac{20}{64} = 0,3125$$

Au plus 1 « pile » : $X = 0$ ou $X = 1$, soit $\frac{1+6}{64} = \frac{7}{64} \approx 0,109$.

Réponse. 0,3125 ; $\approx 0,109$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : huit lancers

a) L'arbre compte $2^8 = 256$ chemins, et la somme de la ligne 8 vaut bien $1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256$.

b) Chaque chemin a la probabilité $\frac{1}{256}$:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{8}{4}}{256} = \frac{70}{256} \approx 0,273$$

$$c) P(X \geq 7) = \frac{\binom{8}{7} + \binom{8}{8}}{256} = \frac{8+1}{256} = \frac{9}{256} \approx 0,035.$$

Réponse. a) 256 — b) $\approx 0,273$ — c) $\approx 0,035$.