

Plaquette 5 - Espérance et problèmes

Loi binomiale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espérance d'une loi binomiale (admise) : si X suit la loi $B(n; p)$,

$$E(X) = n \times p$$

Sur un grand nombre de répétitions du schéma, le nombre moyen de succès se rapproche de np .

« **Au moins un succès** » en n essais.

$$P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$$

Pour trouver le plus petit n tel que cette probabilité dépasse un seuil s , on résout $(1 - p)^n \leq 1 - s$ avec le logarithme décimal (le sens change, car $\log(1 - p) < 0$).

Rappels. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$; passer par l'événement contraire dès que c'est plus court.

Correction de l'exercice 1 - Un nombre moyen de défauts

X suit la loi $B(50; 0,04)$, donc

$$E(X) = 50 \times 0,04 = 2$$

Si l'on répète ce prélèvement de 50 pièces un grand nombre de fois, on trouvera en moyenne 2 pièces défectueuses par prélèvement.

Un prélèvement donné peut en contenir 0, 1, 5... : l'espérance est une moyenne, pas une prévision exacte.

Réponse. $E(X) = 2$ pièces en moyenne.

Correction de l'exercice 2 - La note moyenne au hasard

Le nombre X de bonnes réponses suit la loi $B(20; 0,25)$.

$$E(X) = 20 \times 0,25 = 5$$

Répondre au hasard rapporte en moyenne 5 points sur 20.

C'est pourquoi beaucoup de QCM retirent des points pour une mauvaise réponse : l'exercice suivant montre l'effet de cette pénalité.

Réponse. 5 points sur 20 en moyenne.

Correction de l'exercice 3 - Un QCM avec pénalité

En moyenne, l'élève a $E(X) = 20 \times 0,25 = 5$ bonnes réponses, donc $20 - 5 = 15$ mauvaises.

$$\text{note moyenne} = 5 \times 1 - 15 \times 0,25 = 5 - 3,75 = 1,25$$

La pénalité fait chuter la note moyenne du hasard de 5 à 1,25 point. Avec une pénalité de $\frac{1}{3}$ point, elle tomberait exactement à 0 : répondre au hasard ne rapporterait plus rien en moyenne.

Réponse. 1,25 point en moyenne.

Correction de l'exercice 4 - Combien d'essais ?

Avec n appels, le nombre de ventes suit la loi $B(n; 0,1)$, et $P(X \geq 1) = 1 - 0,9^n$. On résout :

$$1 - 0,9^n \geq 0,95 \Leftrightarrow 0,9^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \log(0,9) \leq \log(0,05)$$

Comme $\log(0,9) < 0$, le sens change : $n \geq \frac{\log(0,05)}{\log(0,9)} \approx 28,4$.

Il faut au moins 29 appels. Vérification : $1 - 0,9^{28} \approx 0,948$ et $1 - 0,9^{29} \approx 0,953$.

Réponse. Au moins 29 appels.

Correction de l'exercice 5 - Accepter ou refuser un lot

a) Le nombre X de pièces défectueuses suit la loi $B(10; 0,1)$:

$$P(X \leq 1) = 0,9^{10} + 10 \times 0,1 \times 0,9^9 \approx 0,3487 + 0,3874 = 0,7361$$

b) Chaque lot est refusé avec la probabilité $1 - 0,7361 = 0,2639$. Le nombre de lots refusés suit la loi $B(6; 0,2639)$, d'espérance $6 \times 0,2639 \approx 1,58$.

Le client peut s'attendre à refuser un ou deux lots sur six, même si le fournisseur dit vrai.

Réponse. a) $\approx 0,7361$ — b) environ 1,6 lot refusé.

Correction de l'exercice 6 - La surréservation

X suit la loi $B(52; 0,95)$.

a) $E(X) = 52 \times 0,95 = 49,4$: en moyenne, l'avion est presque plein.

b) $X \geq 51$ correspond à $X = 51$ ou $X = 52$:

$$P(X = 52) = 0,95^{52} \approx 0,0694 \quad P(X = 51) = 52 \times 0,95^{51} \times 0,05 \approx 0,1901$$

d'où $P(X \geq 51) \approx 0,2595$. Dans environ un vol sur quatre, la compagnie devra refuser au moins un passager.

Réponse. a) 49,4 — b) $\approx 0,2595$.

Correction de l'exercice 7 - Un jeu avec trois dés

a) X suit la loi $B\left(3; \frac{1}{6}\right)$:

$$P(X = 0) = \frac{125}{216} \quad P(X = 1) = \frac{75}{216} \quad P(X = 2) = \frac{15}{216} \quad P(X = 3) = \frac{1}{216}$$

b) Le gain net vaut -1 si $X = 0$, et X euros sinon :

$$E(G) = \frac{-125 + 1 \times 75 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{216} = \frac{-17}{216} \approx -0,079$$

Le jeu paraît favorable (on peut gagner jusqu'à 3 €), mais il fait perdre environ 8 centimes par partie : il n'est pas équitable.

Réponse. b) $E(G) = -\frac{17}{216} \approx -0,079$ € : défavorable.

Correction de l'exercice 8 - Retrouver p à partir de l'espérance

On a $E(X) = 12 \times p = 3$, donc

$$p = \frac{3}{12} = 0,25$$

La probabilité de ne jamais toucher le centre est :

$$P(X = 0) = 0,75^{12} \approx 0,0317$$

soit environ 3 %. Inversement, la probabilité de toucher au moins une fois le centre en 12 flèches vaut $1 - 0,75^{12} \approx 0,968$: l'archer y parvient presque à chaque série.

Réponse. $p = 0,25$; $P(X = 0) \approx 0,0317$.

Correction de l'exercice 9 - Simuler et comparer

Le nombre de succès suit la loi $B(10; 0,3)$, d'espérance

$$E(X) = 10 \times 0,3 = 3$$

La moyenne observée, 2,97, en est très proche : sur un grand nombre de répétitions, la moyenne se rapproche de l'espérance.

Avec 10 répétitions seulement, la moyenne pourrait s'en écarter nettement (par exemple 2,4 ou 3,6) : la fluctuation est d'autant plus grande que le nombre de répétitions est petit.

Réponse. $E(X) = 3$, proche de 2,97 ; avec 10 répétitions, l'écart serait plus grand.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

L'espérance d'une loi binomiale est le **produit** de n par p :

$$E(X) = 40 \times 0,05 = 2$$

Bon sens : si 5 % des essais sont des succès, 40 essais en donnent en moyenne 5 % de 40, soit 2. Le résultat de l'élève, inférieur à p , ne peut pas être un nombre moyen de succès sur 40 essais.

Réponse. $E(X) = 40 \times 0,05 = 2$.

Correction de l'exercice 11 - Garantir un succès

Avec n personnes, $P(X \geq 1) = 1 - 0,8^n$. On résout :

$$1 - 0,8^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,8^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \frac{\log(0,01)}{\log(0,8)} \approx 20,6$$

(le sens change, car $\log(0,8) < 0$).

Il faut exposer au moins 21 personnes. Vérification : $0,8^{20} \approx 0,0115$ et $0,8^{21} \approx 0,0092$.

Réponse. Au moins 21 personnes.

Correction de l'exercice 12 - Deux stratégies de contrôle

Le nombre de défauts trouvés suit la loi $B(n; 0,03)$.

— A : $P(X \geq 1) = 1 - 0,97^{20} \approx 0,456$ et $E(X) = 20 \times 0,03 = 0,6$.

— B : $P(X \geq 1) = 1 - 0,97^{50} \approx 0,782$ et $E(X) = 50 \times 0,03 = 1,5$.

La stratégie B détecte un problème bien plus souvent :

$$0,782 > 0,456$$

mais coûte deux fois et demie plus de contrôles. Le choix dépend du coût d'un contrôle et de celui d'un défaut non détecté.

Réponse. A : $\approx 0,456$ et 0,6 ; B : $\approx 0,782$ et 1,5.

Correction de l'exercice 13 - Une loi binomiale symétrique

Avec la définition de l'espérance :

$$E(X) = 0 \times 0,0625 + 1 \times 0,25 + 2 \times 0,375 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,0625 = 0 + 0,25 + 0,75 + 0,75 + 0,25 = 2$$

Avec la formule : $E(X) = 4 \times 0,5 = 2$.

Les deux calculs concordent. Ici, la loi est symétrique autour de 2, qui est à la fois l'espérance et la valeur la plus probable.

Réponse. $E(X) = 2$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 14 - Des retards de train

X suit la loi $B(10; 0,2)$.

a) $E(X) = 10 \times 0,2 = 2$ retards par mois en moyenne.

b) On applique la formule :

$$P(X = 2) = 45 \times 0,2^2 \times 0,8^8 \approx 0,302$$

c) $P(X = 0) = 0,8^{10} \approx 0,107$: un mois sans aucun retard n'arrive qu'environ une fois sur dix.

Réponse. a) 2 — b) $\approx 0,302$ — c) $\approx 0,107$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un centre d'appels

a) X suit la loi $B(10; 0,2)$, et $E(X) = 10 \times 0,2 = 2$ ventes par heure en moyenne.

b) On calcule les deux probabilités :

$$P(X = 0) = 0,8^{10} \approx 0,107 \quad P(X \geq 1) = 1 - 0,8^{10} \approx 0,893$$

c) Avec n appels, on veut $1 - 0,8^n \geq 0,99$, soit $0,8^n \leq 0,01$, c'est-à-dire $n \geq \frac{\log 0,01}{\log 0,8} \approx 20,6$. Il faut prévoir au moins 21 appels, soit environ deux heures de travail.

Réponse. a) $B(10; 0,2)$, $E(X) = 2$ — b) $\approx 0,107$ et $\approx 0,893$ — c) 21 appels.