

Plaque 4 - Loi binomiale : calculer des probabilités

Loi binomiale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Loi binomiale. Si X est le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de n épreuves de paramètre p , X suit la loi binomiale $B(n; p)$, et pour $0 \leq k \leq n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Cas particuliers.

- $P(X = 0) = (1 - p)^n$ et $P(X = n) = p^n$;
- $P(X = 1) = n p (1 - p)^{n-1}$ et $P(X = n - 1) = n p^{n-1} (1 - p)$.

Événements déduits.

- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ (« au moins un ») ;
- $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$ (« au plus un ») ;
- $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$.

Correction de l'exercice 1 - Un contrôle de qualité

a) Chaque pièce est une épreuve de Bernoulli (succès : « défectueuse », $p = 0,1$), répétée 5 fois de façon identique et indépendante. X suit la loi $B(5; 0,1)$.

b) On applique les formules des cas particuliers :

$$P(X = 0) = 0,9^5 \approx 0,5905 \quad P(X = 1) = 5 \times 0,1 \times 0,9^4 \approx 0,3281$$

Enfin $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,5905 = 0,4095$: il y a environ 41 % de chances de trouver au moins une pièce défectueuse dans l'échantillon.

Réponse. a) $B(5; 0,1)$ — b) $\approx 0,5905$; $\approx 0,3281$; $\approx 0,4095$.

Correction de l'exercice 2 - Répondre au hasard à un QCM

a) X suit la loi $B(10; 0,25)$.

b) On calcule :

$$P(X = 0) = 0,75^{10} \approx 0,0563 \quad P(X = 10) = 0,25^{10} \approx 9,5 \times 10^{-7}$$

et $P(X = 3) = 120 \times 0,25^3 \times 0,75^7 \approx 0,2503$.

Avoir tout juste par hasard est pratiquement impossible (moins d'une chance sur un million), alors qu'avoir tout faux arrive dans plus de 5 % des cas.

Réponse. a) $B(10; 0,25)$ — b) $\approx 0,0563$; $\approx 9,5 \times 10^{-7}$; $\approx 0,2503$.

Correction de l'exercice 3 - Des lancers francs

X suit la loi $B(7; 0,6)$.

a) Tout réussir correspond à un seul chemin :

$$P(X = 7) = 0,6^7 \approx 0,0280 \quad P(X = 6) = 7 \times 0,6^6 \times 0,4 \approx 0,1306$$

$\binom{7}{6} = 7$: l'échec peut avoir lieu à l'un des 7 lancers.)

b) « Au moins 6 » signifie $X = 6$ ou $X = 7$: $P(X \geq 6) \approx 0,0280 + 0,1306 = 0,1586$.

Réponse. a) $\approx 0,0280$; $\approx 0,1306$ — b) $\approx 0,1586$.

Correction de l'exercice 4 - Au plus une erreur

X suit la loi $B(8; 0,05)$. On calcule les deux premiers termes :

$$P(X = 0) = 0,95^8 \approx 0,6634 \quad P(X = 1) = 8 \times 0,05 \times 0,95^7 \approx 0,2793$$

Donc $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0,9428$ (calculé sans arrondi intermédiaire).

Par l'événement contraire : $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,0572$.

Réponse. $P(X \leq 1) \approx 0,9428$; $P(X \geq 2) \approx 0,0572$.

Correction de l'exercice 5 - Autant de pile que de face

X suit la loi $B(6; 0,5)$. La ligne 6 du triangle donne $\binom{6}{3} = 20$, et

$$P(X = 3) = 20 \times 0,5^3 \times 0,5^3 = 20 \times 0,5^6 = \frac{20}{64} = 0,3125$$

Avec $p = 0,5$, tous les chemins ont la même probabilité $0,5^n$: il suffit de compter les chemins favorables.

Réponse. $P(X = 3) = 0,3125$.

Correction de l'exercice 6 - Des clients satisfaits

Le nombre X de mécontents suit la loi $B(10; 0,1)$.

$$P(X = 0) = 0,9^{10} \approx 0,3487 \quad P(X = 1) = 10 \times 0,1 \times 0,9^9 \approx 0,3874$$

« Au moins deux » est le contraire de « au plus un » :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,7361 = 0,2639$$

Réponse. $\approx 0,3487$; $\approx 0,3874$; $\approx 0,2639$.

Correction de l'exercice 7 - Des appels commerciaux

Le nombre X de ventes suit la loi $B(6; 0,15)$.

$$P(X = 0) = 0,85^6 \approx 0,3771$$

« Au moins une vente » est le contraire de « aucune vente » :

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,85^6 \approx 0,6229$$

Le vendeur a un peu moins de deux chances sur trois de conclure au moins une vente.

Réponse. $\approx 0,3771$; $\approx 0,6229$.

Correction de l'exercice 8 - Une loi complète

On calcule $\binom{4}{k} \times 0,2^k \times 0,8^{4-k}$ pour chaque k :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Par exemple $P(X = 1) = 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096$.

$$0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1$$

Les valeurs 0 et 1 sont ici les plus probables, car p est petit.

Réponse. 0,4096 ; 0,4096 ; 0,1536 ; 0,0256 ; 0,0016.

Correction de l'exercice 9 - Utiliser un coefficient binomial

On applique la formule :

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^3 = 10 \times 0,16 \times 0,216 = 0,3456$$

Le coefficient 10 compte les chemins à deux succès ; le produit $0,16 \times 0,216 = 0,03456$ est la probabilité de chacun d'eux.

Réponse. $P(X = 2) = 0,3456$.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

L'élève a calculé la probabilité d'un **seul** chemin à deux succès, par exemple $SS\bar{S}\bar{S}\bar{S}$. Mais les deux succès peuvent se placer de $\binom{5}{2} = 10$ façons.

$$P(X = 2) = 10 \times 0,4^2 \times 0,6^3 = 0,3456$$

Son résultat est dix fois trop petit. Le coefficient binomial ne s'oublie que pour $k = 0$ et $k = n$, où il vaut 1.

Réponse. Le coefficient $\binom{5}{2} = 10$: $P(X = 2) = 0,3456$.

Correction de l'exercice 11 - Au moins deux succès

On passe par l'événement contraire, « au plus un succès », qui ne demande que deux termes :

$$P(X = 0) = 0,6^5 \approx 0,0778 \quad P(X = 1) = 5 \times 0,4 \times 0,6^4 \approx 0,2592$$

Donc $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,3370 = 0,6630$.

Calculer directement $P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$ demanderait quatre termes au lieu de deux.

Réponse. $P(X \geq 2) \approx 0,663$.

Correction de l'exercice 12 - Un diagramme en bâtons

Avec $p = 0,5$, chaque chemin a la probabilité $0,5^4 = 0,0625$; on multiplie par la ligne 4 du triangle (1, 4, 6, 4, 1) :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

Le diagramme en bâtons est **symétrique** autour de $k = 2$, qui est la valeur la plus probable :

$$P(X = 2) = 6 \times 0,0625 = 0,375$$

Réponse. Diagramme symétrique ; valeur la plus probable : 2.

Correction de l'exercice 13 - Vingt pièces contrôlées

Le nombre X de colis mal étiquetés suit la loi $B(20; 0,03)$. On passe par le contraire :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,97^{20} \approx 1 - 0,5438 = 0,4562$$

Même avec 20 colis contrôlés, un défaut de 3 % passe inaperçu plus d'une fois sur deux.

Réponse. $P(X \geq 1) \approx 0,4562$.

Correction de l'exercice 14 - Choisir la bonne méthode

a) Un seul chemin : $P(X = 10) = 0,1^{10} = 10^{-10}$.

b) Contraire de « aucun succès » :

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,9^{10} \approx 0,6513$$

c) Contraire de $X = 10$: $P(X \leq 9) = 1 - 10^{-10}$, pratiquement 1.

Réflexe : quand un événement regroupe beaucoup de valeurs, son contraire en regroupe souvent très peu.

Réponse. a) 10^{-10} — b) $\approx 0,6513$ — c) $1 - 10^{-10}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un vaccin

a) Une personne n'est pas protégée avec la probabilité 0,1 : X suit la loi $B(5; 0,1)$.

b) Toute la famille est protégée si $X = 0$:

$$P(X = 0) = 0,9^5 \approx 0,5905$$

c) $P(X = 1) = 5 \times 0,1 \times 0,9^4 \approx 0,3281$, donc

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 0,0815$$

Un vaccin efficace à 90 % ne garantit donc pas que toute une famille soit protégée : c'est le cas environ six fois sur dix.

Réponse. a) $B(5; 0,1)$ — b) $\approx 0,5905$ — c) $\approx 0,0815$.