

Plaquette 2 - Schéma de Bernoulli et arbres

Loi binomiale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Épreuve de Bernoulli de paramètre p : deux issues, le succès S avec la probabilité p , l'échec $\bar{S}$ avec la probabilité $1 - p$.

Schéma de Bernoulli : n répétitions **identiques** et **indépendantes** de cette épreuve. Sur l'arbre, toutes les branches S portent p et toutes les branches $\bar{S}$ portent $1 - p$.

Probabilité d'un chemin comportant k succès et $n - k$ échecs :

$$p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Nombre de succès X . Tous les chemins à k succès ont la même probabilité, donc

$$P(X = k) = (\text{nombre de chemins à } k \text{ succès}) \times p^k (1 - p)^{n-k}$$

Pour $n = 3$, on compte 1, 3, 3 et 1 chemins pour $k = 0, 1, 2, 3$.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli n'a que **deux** issues.

- Oui : succès « obtenir 6 », de paramètre $p = \frac{1}{6}$; l'échec est « ne pas obtenir 6 ».
- Non : il y a six issues possibles. On peut en faire une épreuve de Bernoulli en ne retenant qu'une question (« pair ou non ? »).
- Oui : succès « le client achète », de paramètre $p = 0,3$.

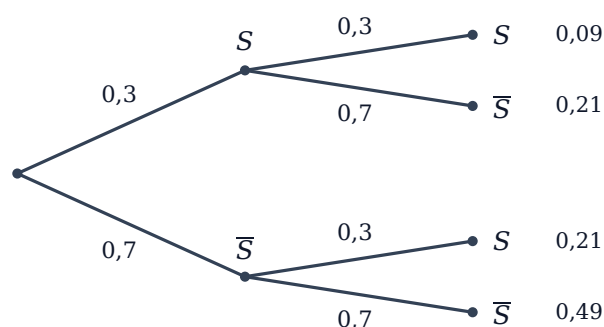
Dans chaque cas, la probabilité de l'échec est

$$1 - p$$

Réponse. a) oui, $p = \frac{1}{6}$ — b) non — c) oui, $p = 0,3$.

Correction de l'exercice 2 - Deux répétitions

Les deux épreuves sont identiques et indépendantes : au second niveau, les branches portent les mêmes probabilités qu'au premier.



Deux épreuves de paramètre 0,3.

— $P(X = 2) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$: un seul chemin SS ;

- $P(X = 1) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$: deux chemins, $S\bar{S}$ et $\bar{S}S$;
- $P(X = 0) = 0,7 \times 0,7 = 0,49$.

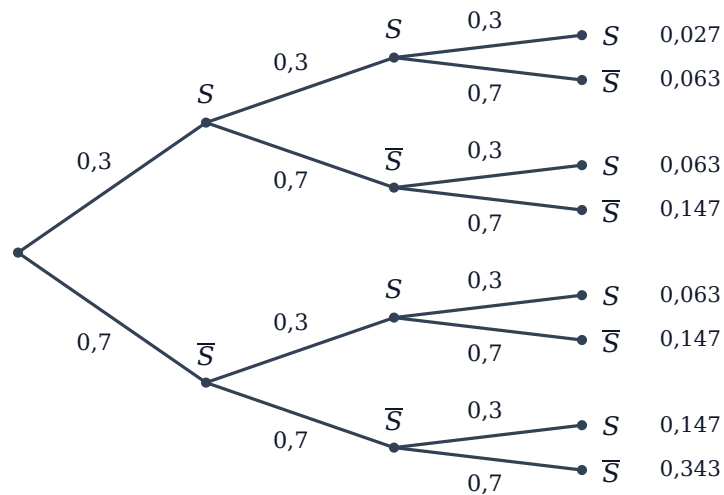
Contrôle :

$$0,09 + 0,42 + 0,49 = 1$$

Réponse. $P(X = 0) = 0,49$; $P(X = 1) = 0,42$; $P(X = 2) = 0,09$.

Correction de l'exercice 3 - Trois répétitions

a) L'arbre a $2^3 = 8$ chemins.



Trois épreuves de paramètre 0,3.

b) Un succès : $S\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}S$, soit 3 chemins. Deux succès : $SS\bar{S}$, $S\bar{S}S$, $\bar{S}SS$, soit 3 chemins.

c) Chaque chemin à k succès a pour probabilité $0,3^k \times 0,7^{3-k}$:

$$P(X = 0) = 0,7^3 = 0,343 \quad P(X = 1) = 3 \times 0,3 \times 0,7^2 = 0,441$$

$$P(X = 2) = 3 \times 0,3^2 \times 0,7 = 0,189 \quad P(X = 3) = 0,3^3 = 0,027$$

Réponse. b) 3 et 3 — c) 0,343 ; 0,441 ; 0,189 ; 0,027.

Correction de l'exercice 4 - Trois lancers d'une pièce

Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$, et les trois lancers sont indépendants.

Trois chemins comportent deux « pile » : PPF, PFP et FPP. Chacun a pour probabilité $0,5^2 \times 0,5 = 0,125$.

$$P(X = 2) = 3 \times 0,125 = 0,375 = \frac{3}{8}$$

Avec $p = 0,5$, tous les chemins ont la même probabilité $\frac{1}{8}$: compter les chemins suffit.

Réponse. $P(X = 2) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Correction de l'exercice 5 - Lister les chemins

On place les deux succès parmi les quatre épreuves, en procédant par ordre pour n'en oublier aucun :

$$SS\bar{S}\bar{S} \quad S\bar{S}S\bar{S} \quad S\bar{S}\bar{S}S \quad \bar{S}S\bar{S}\bar{S} \quad \bar{S}\bar{S}SS \quad \bar{S}\bar{S}\bar{S}S$$

Il y a 6 chemins. Ce nombre est le **coefficient binomial** « 2 parmi 4 », que la plaquette suivante apprend à lire dans le triangle de Pascal.

Réponse. 6 chemins.

Correction de l'exercice 6 - Deux succès sur quatre

Chaque chemin à deux succès et deux échecs a pour probabilité

$$0,2^2 \times 0,8^2 = 0,04 \times 0,64 = 0,0256$$

Les 6 chemins ont la même probabilité, on multiplie :

$$P(X = 2) = 6 \times 0,0256 = 0,1536$$

Oublier le facteur 6 donnerait la probabilité d'un chemin particulier, et non de l'événement « deux succès ».

Réponse. $P(X = 2) = 0,1536$.

Correction de l'exercice 7 - Aucun succès, que des succès

Un seul chemin ne comporte aucun succès, un seul ne comporte que des succès :

$$P(X = 0) = 0,8^4 = 0,4096 \quad P(X = 4) = 0,2^4 = 0,0016$$

L'événement « au moins un succès » est le contraire de « aucun succès » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,4096 = 0,5904$$

Réponse. 0,4096 ; 0,0016 ; 0,5904.

Correction de l'exercice 8 - Avec ou sans remise

Chaque tirage a deux issues (rouge ou non) : c'est une épreuve de Bernoulli.

- **Avec remise**, l'urne est la même à chaque tirage : les tirages sont identiques ($p = 0,3$) et indépendants. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,3$.
- **Sans remise**, la composition change : après une rouge, la probabilité de rouge devient $\frac{2}{9}$. Les tirages ne sont ni identiques ni indépendants : ce n'est pas un schéma de Bernoulli.

Avec remise, par exemple, la probabilité de ne tirer aucune rouge vaut :

$$P(X = 0) = 0,7^3 = 0,343$$

Réponse. Oui avec remise ($n = 3$, $p = 0,3$) ; non sans remise.

Correction de l'exercice 9 - Un QCM au hasard

a) Chaque question est une épreuve de Bernoulli de succès « réponse juste », de paramètre $p = \frac{1}{3}$; les réponses au hasard sont indépendantes. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{3}$.

b) Tout juste : un seul chemin.

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0,012 \quad P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0,198$$

Répondre au hasard donne plus de chances d'avoir tout faux que tout juste.

Réponse. a) $n = 4$, $p = \frac{1}{3}$ — b) $\frac{1}{81}$ et $\frac{16}{81}$.

Correction de l'exercice 10 - Des tirs au but

On a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,8$.

$$P(X = 3) = 0,8^3 = 0,512$$

Exactement deux buts : trois chemins (l'échec peut être au premier, au deuxième ou au troisième tir), chacun de probabilité $0,8^2 \times 0,2 = 0,128$, donc

$$P(X = 2) = 3 \times 0,128 = 0,384$$

Réponse. 0,512 ; 0,384.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

L'élève a calculé la probabilité d'un seul chemin, $S\bar{S}\bar{S}$ (succès au premier essai). Or le succès peut aussi avoir lieu au deuxième ou au troisième essai : 3 chemins ont exactement un succès.

$$P(X = 1) = 3 \times 0,3 \times 0,7^2 = 3 \times 0,147 = 0,441$$

Réflexe à prendre : toujours se demander combien de chemins réalisent l'événement.

Réponse. $P(X = 1) = 0,441$ (trois chemins).

Correction de l'exercice 12 - Identifier les paramètres

On vérifie : deux issues, épreuves identiques et indépendantes.

a) Oui : $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.

b) Oui, en assimilant le choix dans une très grande clientèle à des tirages avec remise : $n = 4$ et $p = 0,4$.

c) Non : sans remise, la probabilité de tirer un as au second tirage dépend du premier ($\frac{3}{31}$ ou $\frac{4}{31}$).

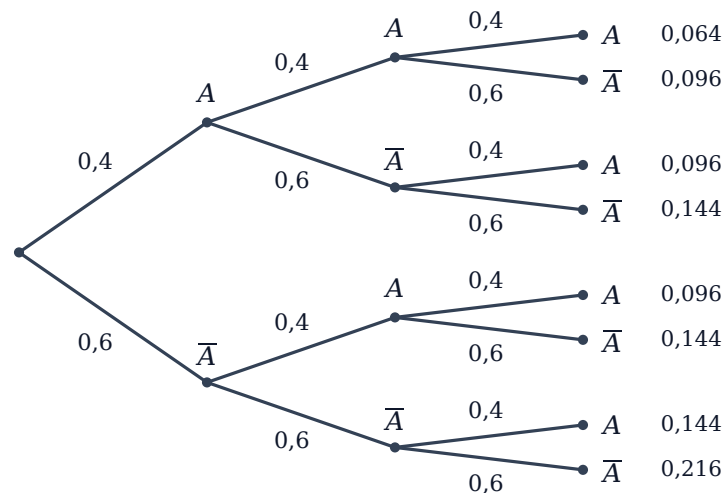
Dans le cas b), la probabilité qu'aucun client ne soit abonné vaut par exemple :

$$P(X = 0) = 0,6^4 = 0,1296$$

Réponse. a) $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$ — b) $n = 4$, $p = 0,4$ — c) non.

Correction de l'exercice 13 - Au moins deux achats

On a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$; X est le nombre d'acheteurs.



Trois clients ; A : le client achète.

« Au moins deux » signifie $X = 2$ ou $X = 3$:

$$P(X \geq 2) = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 + 0,4^3 = 0,288 + 0,064 = 0,352$$

Il y a environ une chance sur trois qu'au moins deux des trois clients achètent.

Réponse. $P(X \geq 2) = 0,352$.

Correction de l'exercice 14 - Quatre lancers de pièce

Chaque chemin a la probabilité $0,5^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$:

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

$P(X = 2) = 6 \times 0,0625 = 0,375$: obtenir exactement « autant de pile que de face » n'arrive que dans 37,5 % des cas.

C'est la valeur la plus probable, mais pas une chance sur deux.

Réponse. $P(X = 2) = 0,375$, pas 0,5.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : des contrôles de sécurité

a) $n = 4$ et $p = 0,25$ (succès : « être fouillé »).

b) On calcule :

$$P(X = 0) = 0,75^4 \approx 0,3164 \quad P(X = 1) = 4 \times 0,25 \times 0,75^3 \approx 0,4219$$

c) « Au moins deux » est le contraire de « zéro ou un » :

$$P(X \geq 2) = 1 - 0,3164 - 0,4219 = 0,2617$$

soit environ une chance sur quatre.

Réponse. a) $n = 4$, $p = 0,25$ — b) $\approx 0,3164$ et $\approx 0,4219$ — c) $\approx 0,2617$.