

Plaquette 1 - Variable aléatoire et espérance

Loi binomiale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Loi de probabilité. Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$, sa loi est le tableau des $P(X = x_i)$, dont la somme vaut 1.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Espérance.

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Interprétation. Sur un grand nombre de répétitions, la moyenne des valeurs observées de X se rapproche de $E(X)$.

Jeu. Si G est le gain **net** du joueur (gain moins mise) : le jeu est **équitable** si $E(G) = 0$, favorable au joueur si $E(G) > 0$, défavorable si $E(G) < 0$.

Correction de l'exercice 1 - Une roue de loterie

a) Le gain net est le gain moins la mise : $20 - 4 = 16$, $5 - 4 = 1$ ou $0 - 4 = -4$.

g_i	16	1	-4
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$

b) On calcule :

$$E(G) = 16 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + (-4) \times \frac{5}{8} = \frac{16 + 2 - 20}{8} = -0,25$$

En moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur perd 0,25 € par partie : le jeu est défavorable au joueur, et rapporte en moyenne 0,25 € par partie à l'organisateur.

Réponse. b) $E(G) = -0,25$ € : jeu défavorable au joueur.

Correction de l'exercice 2 - Compléter une loi

La somme des probabilités vaut 1 :

$$0,1 + 0,3 + a + 0,2 = 1 \Leftrightarrow a = 0,4$$

On calcule ensuite l'espérance :

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = 0 + 0,3 + 0,8 + 0,6 = 1,7$$

L'espérance, 1,7, n'est pas forcément une valeur prise par X : c'est une moyenne.

Réponse. $a = 0,4$; $E(X) = 1,7$.

Correction de l'exercice 3 - Un jeu équitable

On note X le gain **brut** (avant de retirer la mise). Sa loi est :

x_i	10	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Son espérance vaut $E(X) = \frac{10}{6} + \frac{2}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

Le jeu est équitable si le gain net moyen est nul, c'est-à-dire si la mise m est égale au gain brut moyen :

$$E(X) - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Avec une mise de 2 €, ni le joueur ni l'organisateur ne gagne en moyenne.

Réponse. Une mise de 2 €.

Correction de l'exercice 4 - Le résultat d'un dé

Chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$:

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

On ne peut pas obtenir 3,5 en un lancer. L'espérance est la valeur **moyenne** que l'on obtiendrait en lançant le dé un très grand nombre de fois : la moyenne des résultats se rapprocherait de 3,5.

Réponse. $E(X) = 3,5$, valeur moyenne sur un grand nombre de lancers.

Correction de l'exercice 5 - Un ticket à gratter

Le gain net G vaut $10 - 2 = 8$, $50 - 2 = 48$ ou -2 , avec les probabilités 0,05, 0,01 et $1 - 0,06 = 0,94$.

$$E(G) = 8 \times 0,05 + 48 \times 0,01 + (-2) \times 0,94 = 0,4 + 0,48 - 1,88 = -1$$

En moyenne, un joueur perd 1 € par ticket, soit la moitié de sa mise. Autre calcul : le gain brut moyen est $10 \times 0,05 + 50 \times 0,01 = 1$ €, pour une mise de 2 €.

Réponse. $E(G) = -1$ €.

Correction de l'exercice 6 - Le nombre de clients

On calcule l'espérance :

$$E(X) = 0 + 0,25 + 0,7 + 0,6 + 0,4 = 1,95$$

En moyenne, 1,95 client entre par quart d'heure. Une journée de 8 heures compte 32 quarts d'heure, d'où une estimation de $32 \times 1,95 = 62,4$, soit environ 62 clients.

C'est une estimation moyenne : le nombre réel varie d'un jour à l'autre.

Réponse. $E(X) = 1,95$; environ 62 clients par jour.

Correction de l'exercice 7 - Le coût d'un contrat d'assurance

On note C le coût du contrat pour l'assureur. Son espérance est

$$E(C) = 500 \times 0,1 + 5000 \times 0,01 + 0 \times 0,89 = 50 + 50 = 100$$

Le contrat coûte en moyenne 100 € à l'assureur. Avec une prime de 150 €, il gagne en moyenne $150 - 100 = 50$ € par contrat.

Sur un contrat isolé, il peut perdre beaucoup ; c'est sur des milliers de contrats que la moyenne s'impose.

Réponse. 50 € par contrat en moyenne.

Correction de l'exercice 8 - Une loi lue sur un arbre

On regroupe les chemins selon le nombre de rouges :

- $X = 2$: un seul chemin, $P(X = 2) = 0,3$;
- $X = 1$: deux chemins, $P(X = 1) = 0,3 + 0,3 = 0,6$;
- $X = 0$: $P(X = 0) = 0,1$.

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,6 + 2 \times 0,3 = 1,2$$

On obtient en moyenne 1,2 boule rouge sur deux tirages, ce qui correspond à la proportion de rouges dans l'urne : $2 \times \frac{3}{5} = 1,2$.

Réponse. $P(X = 0) = 0,1$; $P(X = 1) = 0,6$; $P(X = 2) = 0,3$; $E(X) = 1,2$.

Correction de l'exercice 9 - Comparer deux jeux

On compare les gains nets moyens :

$$E(G_A) = 10 \times 0,2 - 2 = 0 \quad E(G_B) = 50 \times 0,03 - 2 = -0,5$$

Le jeu A est équitable, le jeu B fait perdre en moyenne 0,50 € par partie : A est le plus intéressant en moyenne.

Le jeu B fait pourtant rêver avec son gros lot ; l'espérance rappelle que ce gros lot est trop rare pour compenser la mise.

Réponse. Le jeu A ($E = 0$) contre B ($E = -0,5$ €).

Correction de l'exercice 10 - Retrouver une probabilité

L'espérance s'écrit en fonction de p :

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 10 \times 0,2 + 50p = 2 + 50p$$

On résout $2 + 50p = 3$, d'où $p = \frac{1}{50} = 0,02$.

Enfin $P(X = 0) = 1 - 0,2 - 0,02 = 0,78$.

Contrôle : $10 \times 0,2 + 50 \times 0,02 = 2 + 1 = 3$. Le gros lot de 50 apporte à lui seul un tiers de l'espérance, bien qu'il ne sorte que deux fois sur cent.

Réponse. $p = 0,02$; $P(X = 0) = 0,78$.

Correction de l'exercice 11 - La recette d'un glacier

On note R la recette. Son espérance est :

$$E(R) = 600 \times 0,5 + 300 \times 0,3 + 50 \times 0,2 = 300 + 90 + 10 = 400$$

La recette moyenne est de 400 € par jour.

Sur une saison de 90 jours, le glacier peut prévoir environ $90 \times 400 = 36\,000$ € de recette.

Réponse. 400 € par jour en moyenne.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

L'élève fait la moyenne simple des trois recettes, comme si chaque météo avait la même probabilité $\frac{1}{3}$. Or le beau temps est bien plus fréquent (0,5) que la pluie (0,2).

L'espérance est une moyenne **pondérée** par les probabilités :

$$E(R) = 600 \times 0,5 + 300 \times 0,3 + 50 \times 0,2 = 400$$

Son calcul sous-estime la recette de plus de 80 € par jour.

Réponse. Il faut pondérer par les probabilités : $E(R) = 400$ €.

Correction de l'exercice 13 - Trois lancers de pièce

Les 8 issues (PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF) sont équiprobables. On compte les « pile » :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \frac{0 + 3 + 6 + 3}{8} = \frac{12}{8} = 1,5$$

En moyenne, on obtient 1,5 « pile » en trois lancers, la moitié des lancers.

Réponse. Loi $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$; $E(X) = 1,5$.

Correction de l'exercice 14 - Jouer cent fois

L'espérance est un gain moyen par partie. Sur 100 parties, le joueur peut s'attendre à un gain total d'environ

$$100 \times (-0,25) = -25$$

soit une perte d'environ 25 €.

Ce n'est pas une certitude : sur 100 parties, la chance peut jouer dans un sens ou dans l'autre, et le joueur peut finir gagnant. Mais plus il joue, plus sa moyenne par partie se rapproche de $-0,25$ €.

Réponse. Une perte d'environ 25 €, sans certitude.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un stand de fête foraine

a) Le gain net vaut 17, 2 ou -3 avec les probabilités 0,1, 0,3 et 0,6 :

$$E(G) = 17 \times 0,1 + 2 \times 0,3 - 3 \times 0,6 = 1,7 + 0,6 - 1,8 = 0,5$$

Le jeu est favorable au joueur : il gagne en moyenne 0,50 € par partie.

b) Le gain brut moyen est $20 \times 0,1 + 5 \times 0,3 = 3,5$ € : une mise de 3,50 € rend le jeu équitable.

c) Il faut que la mise dépasse le gain brut moyen de 0,50 € : $3,5 + 0,5 = 4$ €.

Réponse. a) $E(G) = 0,5$ € : favorable au joueur — b) 3,50 € — c) 4 €.