

Plaquette 3 - Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Loi binomiale — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Dès que n dépasse 4, l'arbre devient trop grand pour compter les chemins un par un. On définit le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ comme le nombre de chemins à k succès, on établit ses propriétés en raisonnant sur l'arbre, puis on le lit dans le **triangle de Pascal**, construit jusqu'à $n = 10$.

Exercice 1 - Compter des chemins

Dans un schéma de Bernoulli à 4 épreuves, on a listé les chemins à deux succès : $SS\bar{S}\bar{S}$, $S\bar{S}SS$, $S\bar{S}\bar{S}S$, $\bar{S}SS\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}S$, $\bar{S}\bar{S}SS$. En déduire $\binom{4}{2}$. Que vaut $\binom{4}{3}$?

Exercice 2 - Les valeurs immédiates

Justifier, en raisonnant sur l'arbre, que pour tout entier $n \geq 1$: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$. Donner $\binom{10}{0}$, $\binom{10}{10}$ et $\binom{10}{1}$.

Exercice 3 - La symétrie

Expliquer pourquoi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En déduire $\binom{10}{9}$ et $\binom{10}{7}$, sachant que $\binom{10}{3} = 120$.

Exercice 4 - Construire le triangle

Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 6$, en partant de la ligne $n = 0$ (un seul 1), puis lire $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{3}$.

Exercice 5 - La formule de Pascal

Dans un schéma de Bernoulli à 5 épreuves, on veut compter les chemins à 2 succès en distinguant le résultat de la **dernière** épreuve. En déduire que $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$, puis calculer $\binom{5}{2}$.

Exercice 6 - Prolonger jusqu'à $n = 10$

La ligne 8 du triangle de Pascal est 1 8 28 56 70 56 28 8 1. Calculer les lignes 9 et 10, puis donner $\binom{10}{5}$.

Exercice 7 - La somme d'une ligne

Calculer la somme des nombres de la ligne 5 du triangle de Pascal. Expliquer pourquoi la somme de la ligne n vaut 2^n .

Exercice 8 - Trois succès sur dix

Un commercial passe 10 appels ; chaque appel aboutit à une vente ou non. De combien de façons différentes (suites de résultats) peut-il réaliser exactement 3 ventes ? Et exactement 7 ?

Exercice 9 - Un chemin ou un événement

On répète 5 fois une épreuve de paramètre 0,1.

- Calculer la probabilité du chemin $SS\bar{S}\bar{S}\bar{S}$.
- En déduire la probabilité d'obtenir exactement 2 succès.

Exercice 10 - Générer le triangle en Python

Le programme suivant affiche les lignes du triangle de Pascal :

```
ligne = [1]
for n in range(10):
    print(ligne)
    nouvelle = [1]
    for k in range(len(ligne) - 1):
        nouvelle.append(ligne[k] + ligne[k + 1])
    nouvelle.append(1)
    ligne = nouvelle
```

- Quelle ligne contient la variable *ligne* au départ ? Quelle est la deuxième ligne affichée ?
- Quelle propriété du cours l'instruction de la boucle intérieure traduit-elle ?

Exercice 11 - Retrouver n

Déterminer l'entier n dans chaque cas : a) $\binom{n}{1} = 8$; b) $\binom{n}{2} = 10$; c) $\binom{n}{n-1} = 7$.

Exercice 12 - Repérer une erreur

Un élève affirme que $\binom{6}{2} = 6 \times 2 = 12$. Montrer qu'il se trompe en utilisant la formule de Pascal.

Exercice 13 - Les matchs d'un tournoi

Une équipe joue 5 matchs (sans match nul). De combien de façons peut-elle en gagner exactement 3 ? En gagner au moins 4 ?

Exercice 14 – Utiliser la ligne 6

On lance 6 fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 « pile », puis au plus 1 « pile ».

Exercice 15 – Synthèse : huit lancers

On lance 8 fois une pièce équilibrée. La ligne 8 du triangle de Pascal est 1 8 28 56 70 56 28 8 1.

- Combien l'arbre compte-t-il de chemins ? Vérifier avec la ligne 8.
- Calculer la probabilité d'obtenir exactement 4 « pile ».
- Calculer la probabilité d'obtenir au moins 7 « pile ».