

Plaquette 5 - Espérance et problèmes

Loi binomiale — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Utiliser l'espérance $E(X) = np$ d'une loi binomiale pour prévoir un nombre moyen de succès (ventes, défauts, bonnes réponses), puis résoudre des problèmes complets : prendre une décision à partir d'une probabilité, déterminer le nombre d'essais nécessaires pour atteindre un objectif, comparer deux stratégies.

Exercice 1 - Un nombre moyen de défauts

Une machine produit 4 % de pièces défectueuses. On prélève 50 pièces (tirages assimilés à des tirages avec remise) et l'on note X le nombre de pièces défectueuses. Calculer $E(X)$ et l'interpréter.

Exercice 2 - La note moyenne au hasard

Un QCM de 20 questions à 4 réponses rapporte 1 point par bonne réponse. Quelle note un élève qui répond au hasard obtient-il en moyenne ?

Exercice 3 - Un QCM avec pénalité

Le QCM de 20 questions à 4 réponses rapporte maintenant 1 point par bonne réponse et retire 0,25 point par mauvaise réponse. Un élève répond au hasard à toutes les questions. Quelle note obtient-il en moyenne ?

Exercice 4 - Combien d'essais ?

Un commercial conclut une vente à chaque appel avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres appels. Combien d'appels doit-il passer pour avoir au moins 95 % de chances de conclure au moins une vente ?

Exercice 5 - Accepter ou refuser un lot

Un client contrôle 10 pièces d'un lot et l'accepte s'il trouve au plus une pièce défectueuse. Le fournisseur affirme que 10 % de ses pièces sont défectueuses.

- Calculer la probabilité qu'un lot soit accepté.
- Le client contrôle 6 lots. Combien peut-il s'attendre à en refuser ?

Exercice 6 - La surréservation

Un avion a 50 places. La compagnie vend 52 billets ; chaque passager se présente avec la probabilité 0,95, indépendamment des autres. On note X le nombre de passagers qui se présentent.

- Calculer $E(X)$.
- Calculer la probabilité que des passagers soient refusés, c'est-à-dire $P(X \geq 51)$.

Exercice 7 - Un jeu avec trois dés

On mise 1 € et l'on lance trois dés. Si aucun dé ne donne 6, on perd la mise ; sinon, on récupère la mise et l'on gagne 1 € par 6 obtenu. On note X le nombre de 6.

- Donner la loi de X ($\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$).
- Calculer l'espérance du gain net. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 8 - Retrouver p à partir de l'espérance

Un archer tire 12 flèches. Le nombre de flèches dans le centre de la cible suit une loi binomiale d'espérance 3. Quelle est la probabilité p de toucher le centre ? Calculer la probabilité de ne jamais le toucher.

Exercice 9 - Simuler et comparer

Un tableur simule 1000 fois un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$, et calcule la moyenne des nombres de succès obtenus : 2,97. Comparer avec l'espérance. Que donnerait une simulation de 10 répétitions seulement ?

Exercice 10 - Repérer une erreur

Pour X de loi $B(40; 0,05)$, un élève écrit « $E(X) = \frac{0,05}{40} = 0,00125$ ». Corriger et interpréter.

Exercice 11 - Garantir un succès

Une campagne publicitaire touche chaque personne exposée avec la probabilité 0,2. Combien de personnes faut-il exposer pour que la probabilité qu'au moins une soit touchée dépasse 0,99 ?

Exercice 12 - Deux stratégies de contrôle

Une usine produit 3 % de pièces défectueuses. Stratégie A : contrôler 20 pièces. Stratégie B : contrôler 50 pièces. Pour chaque stratégie, calculer la probabilité de détecter au moins une pièce défectueuse et le nombre moyen de pièces défectueuses trouvées.

Exercice 13 - Une loi binomiale symétrique

X suit la loi $B(4; 0,5)$, de loi 0,0625 ; 0,25 ; 0,375 ; 0,25 ; 0,0625. Calculer $E(X)$ avec la formule de la définition, puis avec np .

Exercice 14 - Des retards de train

Un train est en retard avec la probabilité 0,2 chaque jour, indépendamment des autres jours. Un salarié le prend 10 jours par mois ; X est le nombre de retards.

- Calculer $E(X)$.
- Calculer $P(X = 2)$, avec $\binom{10}{2} = 45$.

c) Calculer la probabilité qu'il ne subisse aucun retard dans le mois.

Exercice 15 - Synthèse : un centre d'appels

Dans un centre d'appels, chaque appel aboutit à une vente avec la probabilité 0,2, indépendamment des autres. Un conseiller passe 10 appels par heure ; X est le nombre de ventes en une heure.

- Donner la loi de X et son espérance.
- Calculer la probabilité qu'il ne vende rien en une heure, puis qu'il vende au moins une fois.
- Le responsable veut qu'un conseiller ait au moins 99% de chances de vendre au moins une fois dans sa série d'appels. Combien d'appels faut-il prévoir ?