MATHÉMATIQUES

Loi binomiale

Terminale STMG

Variable aléatoire • Espérance • Schéma de Bernoulli • Coefficient binomial
Triangle de Pascal • Loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ • $E(X) = np$ • « Au moins un »

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027), partie « Statistique et probabilités », section « Variables aléatoires discrètes finies ». Il couvre :

- espérance d'une variable aléatoire discrète, interprétation ;
- schéma de Bernoulli ; coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ comme nombres de chemins ; triangle de Pascal pour $n \leq 10$, formule de Pascal ;
- loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$: $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = n)$, $P(X = n-1)$, $P(X = k)$; espérance np (admise) ;
- **algorithmes** : triangle de Pascal, diagramme en bâtons, calcul d'une espérance.

Objectif : calculer et interpréter une espérance, reconnaître une loi binomiale, calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal et des probabilités $P(X = k)$.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Espérance d'une variable aléatoire 3

2 Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux 3

3 Loi binomiale 4

4 Algorithmes 5

5 Erreurs classiques 6

6 Fiche de synthèse 6

7 Exercices d'application 6

8 Corrigés des exercices 6

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Espérance d'une variable aléatoire

Espérance

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_k$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_k$:

$$\boxed{E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k}$$

C'est la valeur moyenne de X sur un grand nombre de répétitions.

Maintenance

Le nombre X d'interventions par jour sur une machine vaut 0, 1, 2 avec les probabilités 0,6 ; 0,3 ; 0,1. $E(X) = 0 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$: en moyenne une intervention tous les deux jours.

2. Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

Schéma de Bernoulli

Répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli (succès de probabilité p) constitue un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p. On le représente par un arbre à 2^n chemins.

Coefficient binomial

Le nombre de chemins de l'arbre comportant exactement k succès est noté $\boxed{\binom{n}{k}}$ (« k parmi n »).

Valeurs immédiates et formule de Pascal

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, et pour $1 \leq k \leq n-1$:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Démonstration. Un chemin à k succès sur n épreuves commence soit par un succès, suivi de $k-1$ succès sur les $n-1$ épreuves restantes ($\binom{n-1}{k-1}$ chemins), soit par un échec, suivi de k succès sur $n-1$ épreuves ($\binom{n-1}{k}$ chemins).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Triangle de Pascal

Chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui (à gauche et juste au-dessus) :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On le prolonge ligne par ligne jusqu'à $n = 10$; par exemple $\binom{10}{3} = 120$.

3. Loi binomiale

Loi binomiale

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable X qui compte le nombre de succès suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n\,;p)$. Pour $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

(nombre de chemins à k succès $\times$ probabilité d'un tel chemin).

Cas particuliers

$P(X = 0) = (1-p)^n$; $P(X = n) = p^n$; $P(X = 1) = np(1-p)^{n-1}$; $P(X = n-1) = np^{n-1}(1-p)$; $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$.

Espérance (admise)

Si X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$, alors $\boxed{E(X) = np}$.

Contrôle qualité

5 % des pièces d'une production sont défectueuses. On prélève 8 pièces (production assez grande pour assimiler le prélèvement à des tirages avec remise). Le nombre X de pièces défectueuses suit $\mathcal{B}(8\,;0{,}05)$.

- Aucune défectueuse : $P(X = 0) = 0{,}95^8 \approx 0{,}663$.
- Au moins une : $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}95^8 \approx 0{,}337$.
- Au plus une : $P(X \leq 1) = 0{,}95^8 + 8 \times 0{,}05 \times 0{,}95^7 \approx 0{,}943$.
- En moyenne : $E(X) = 8 \times 0{,}05 = 0{,}4$ pièce défectueuse par prélèvement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$

$P(X=3)=\binom{10}{3}\times 0{,}3^3\times 0{,}7^7=120\times 0{,}027\times 0{,}7^7\approx 0{,}267\,;\ E(X)=3.$

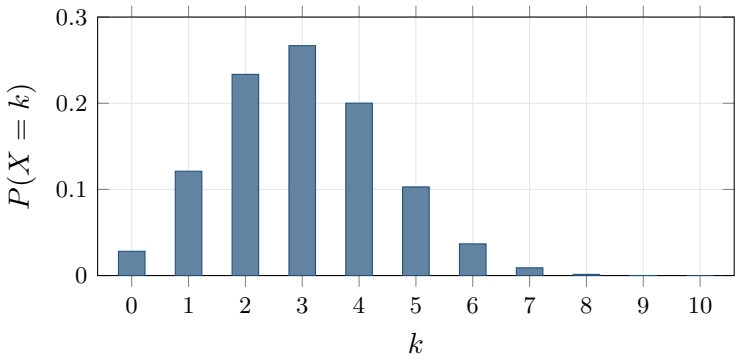


Diagramme en bâtons de la loi $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$: les valeurs les plus probables entourent l'espérance $np=3$.

4. Algorithmes

Triangle de Pascal

```
def pascal(n):
    ligne = [1]
    for i in range(n):
        nouvelle = [1]
        for k in range(1, len(ligne)):
            nouvelle.append(ligne[k - 1] + ligne[k])
        nouvelle.append(1)
        ligne = nouvelle
    return ligne

print(pascal(10))   # [1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]
```

Loi et espérance

```
def loi_binomiale(n, p):
    c = pascal(n)
    return [c[k] * p**k * (1 - p)**(n - k) for k in range(n + 1)]

def esperance(valeurs, probas):
    e = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        e = e + valeurs[i] * probas[i]
    return e

L = loi_binomiale(10, 0.3)
print(esperance(list(range(11)), L))   # 3.0 (aux arrondis près)
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier le coefficient binomial : $p^k(1-p)^{n-k}$ n'est la probabilité que d'un seul chemin.
- Utiliser la loi binomiale pour des tirages sans remise dans un petit lot (épreuves non indépendantes).
- Calculer « au moins un » terme à terme au lieu de passer par $1 - P(X = 0)$.
- Confondre $P(X \leq 1)$ et $P(X < 1) = P(X = 0)$.

6. Fiche de synthèse

Espérance	$E(X) = \sum x_i p_i$
Coefficient binomial	$\binom{n}{k}$: nombre de chemins à k succès ; $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Loi binomiale	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Cas utiles	$P(X = 0) = (1-p)^n$; $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$
Espérance binomiale	$E(X) = np$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Triangle de Pascal

Compléter les lignes $n = 7$ et $n = 8$ du triangle de Pascal. En déduire $\binom{8}{2}$ et $\binom{8}{5}$.

Exercice 2 – QCM

Un QCM comporte 4 questions ; chacune propose 4 réponses dont une seule juste. Un élève répond au hasard. Quelle est la loi du nombre X de bonnes réponses ? Calculer $P(X = 2)$, $P(X \geq 1)$ et $E(X)$.

Exercice 3 – Retours de commandes

Une commande en ligne est retournée avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres. Un client passe 6 commandes. Calculer la probabilité qu'aucune ne soit retournée, puis qu'exactement une le soit.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $n = 7$: $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$. $n = 8$: $1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1$. Donc $\binom{8}{2} = 28$ et $\binom{8}{5} = 56$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. X suit $\mathcal{B}(4\,;0{,}25)$. $P(X=2)=6\times 0{,}25^2\times 0{,}75^2\approx 0{,}211$; $P(X\geq 1)=1-0{,}75^4\approx 0{,}684$; $E(X)=4\times 0{,}25=1$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. X suit $\mathcal{B}(6\,;0{,}1)$. $P(X=0)=0{,}9^6\approx 0{,}531$; $P(X=1)=6\times 0{,}1\times 0{,}9^5\approx 0{,}354$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).