

Plaquette 2 – Arbres pondérés

Probabilités conditionnelles – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Construire l'arbre.

- Au premier niveau : $P(A)$ et $P(\bar{A})$.
- Au second niveau, après A : $P_A(B)$ et $P_A(\bar{B})$; après $\bar{A}$: $P_{\bar{A}}(B)$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})$.

Règle des nœuds. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

Règle du chemin. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches :

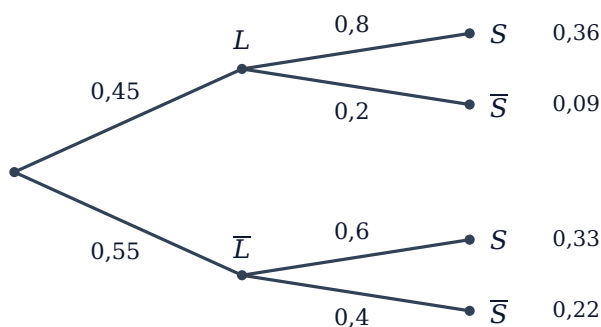
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

C'est la définition de la probabilité conditionnelle, lue sur l'arbre.

Contrôle. La somme des probabilités de toutes les feuilles vaut 1.

Correction de l'exercice 1 – Construire un premier arbre

a) Premier niveau : $P(L) = 0,45$ et $P(\bar{L}) = 0,55$. Second niveau : $P_L(S) = 0,8$, $P_L(\bar{S}) = 0,2$, $P_{\bar{L}}(S) = 0,6$ et $P_{\bar{L}}(\bar{S}) = 0,4$.



L : achat en ligne ; S : client satisfait.

b) On multiplie le long de chaque chemin :

$$P(L \cap S) = 0,45 \times 0,8 = 0,36 \quad P(L \cap \bar{S}) = 0,45 \times 0,2 = 0,09$$

et $P(\bar{L} \cap S) = 0,55 \times 0,6 = 0,33$, $P(\bar{L} \cap \bar{S}) = 0,55 \times 0,4 = 0,22$.

Contrôle : $0,36 + 0,09 + 0,33 + 0,22 = 1$.

Réponse. 0,36 ; 0,09 ; 0,33 ; 0,22.

Correction de l'exercice 2 – Compléter un arbre

On applique la règle des nœuds : les branches issues d'un même nœud ont une somme égale à 1.

- $P(\bar{A}) = 1 - 0,25 = 0,75$;
- $P_A(B) = 1 - 0,1 = 0,9$;
- $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$.

Puis la règle du chemin :

$$P(A \cap B) = 0,25 \times 0,9 = 0,225 \quad P(\bar{A} \cap B) = 0,75 \times 0,7 = 0,525$$

Réponse. 0,75 ; 0,9 ; 0,3 ; $P(A \cap B) = 0,225$; $P(\bar{A} \cap B) = 0,525$.

Correction de l'exercice 3 - Lire un arbre

Les branches du premier niveau portent $P(A) = 0,3$ et $P(\bar{A}) = 0,7$. Celles du second niveau portent des probabilités conditionnelles : $P_A(B) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,8$.

On multiplie le long des chemins :

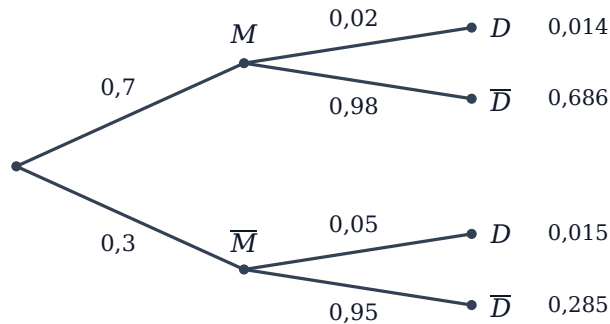
$$P(A \cap B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$$

Attention : 0,6 n'est pas $P(B)$, mais la probabilité de B sachant A .

Réponse. 0,3 ; 0,6 ; 0,8 ; 0,18 ; 0,56.

Correction de l'exercice 4 - Deux machines

a) On note M « la pièce vient de la machine 1 » et D « la pièce est défectueuse ». Alors $P(M) = 0,7$, $P_{\bar{M}}(D) = 0,02$ et $P_{\bar{M}}(\bar{D}) = 0,05$.



M : pièce produite par la machine 1 ; D : pièce défectueuse.

b) On multiplie le long des chemins :

$$P(M \cap D) = 0,7 \times 0,02 = 0,014 \quad P(\bar{M} \cap D) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$$

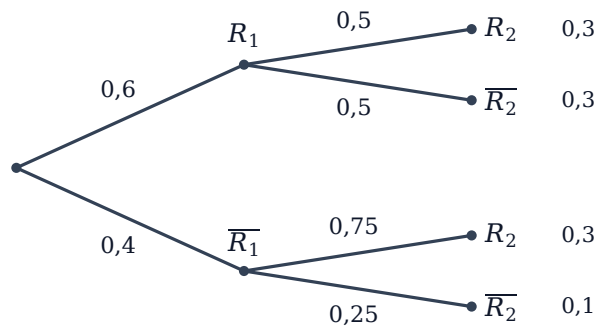
La machine 2 produit moins de pièces, mais davantage de pièces défectueuses au total.

Réponse. 0,014 et 0,015.

Correction de l'exercice 5 - Deux tirages sans remise

a) Au premier tirage, $P(R_1) = \frac{3}{5} = 0,6$. Au second, il ne reste que 4 boules : si la première

était rouge, il reste 2 rouges, donc $P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4} = 0,5$; si elle était bleue, il reste 3 rouges, donc $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{3}{4} = 0,75$.



R_i : la i -ième boule tirée est rouge.

b) On multiplie le long des chemins :

$$P(R_1 \cap R_2) = 0,6 \times 0,5 = 0,3 \quad P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$$

Sans remise, la composition de l'urne change : c'est pour cela que le second niveau dépend du premier.

Réponse. 0,3 et 0,1.

Correction de l'exercice 6 - Avec ou sans remise

Avec remise, l'urne est la même aux deux tirages : la probabilité de tirer une rouge vaut 0,6 à chaque fois, quel que soit le premier résultat.

$$P(R_1 \cap R_2) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$$

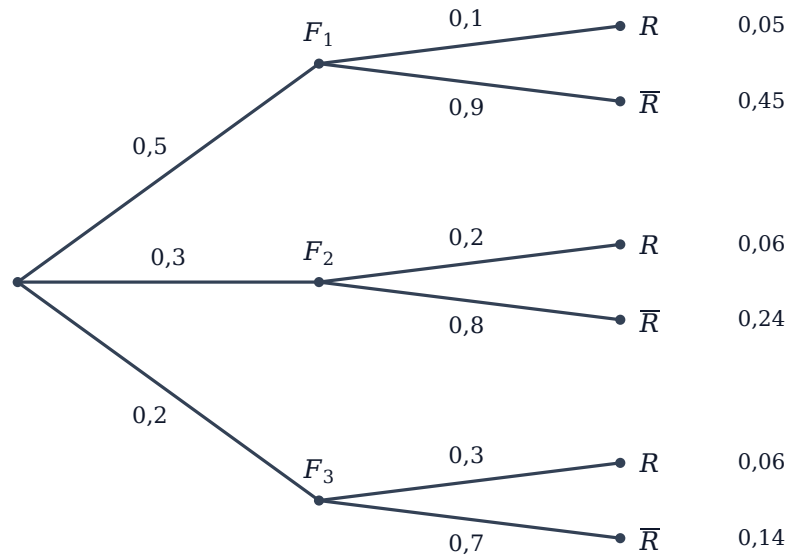
C'est plus que sans remise (0,3) : quand on garde la première boule rouge hors de l'urne, il en reste moins pour le second tirage.

Avec remise, les deux branches du second niveau portent les mêmes probabilités : $P_{R_1}(R_2) = P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,6$. Les deux tirages sont indépendants.

Réponse. 0,36 avec remise, contre 0,3 sans remise.

Correction de l'exercice 7 - Trois fournisseurs

a) Le premier niveau a trois branches : $P(F_1) = 0,5$, $P(F_2) = 0,3$ et $P(F_3) = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$. Après chaque fournisseur, on note R « en retard ».



F_i : fournisseur i ; R : livraison en retard.

b) On multiplie le long du chemin F_3 puis R :

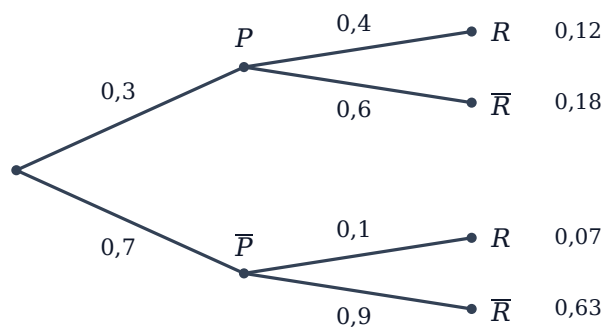
$$P(F_3 \cap R) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$$

Les trois événements F_1 , F_2 , F_3 forment une **partition** : chaque livraison vient d'un et d'un seul fournisseur.

Réponse. $P(F_3 \cap R) = 0,06$.

Correction de l'exercice 8 - Pluie et retards

On note P « il pleut » et R « le bus est en retard ». L'énoncé donne $P(P) = 0,3$, $P_P(R) = 0,4$ et $P_{\bar{P}}(R) = 0,1$; on complète par la règle des nœuds.



P : il pleut ; R : le bus est en retard.

Le chemin « pluie puis retard » a pour probabilité :

$$P(P \cap R) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$$

Les quatre feuilles ont une somme égale à 1 : $0,12 + 0,18 + 0,07 + 0,63 = 1$.

Réponse. $P(P \cap R) = 0,12$.

Correction de l'exercice 9 - Que porte chaque branche ?

Le nombre 0,15 est une proportion de délégués **parmi les internes** : c'est $P_I(D)$, une probabilité conditionnelle. Elle ne peut se placer qu'après la branche I , au second niveau.

L'arbre correct commence donc par l'internat :

- premier niveau : $P(I) = 0,2$ et $P(\bar{I}) = 0,8$;
- second niveau : $P_I(D) = 0,15$, $P_I(\bar{D}) = 0,85$, $P_{\bar{I}}(D) = 0,05$ et $P_{\bar{I}}(\bar{D}) = 0,95$.

Par exemple, la probabilité d'être un interne délégué est :

$$P(I \cap D) = 0,2 \times 0,15 = 0,03$$

Réponse. 0,15 = $P_I(D)$ va au second niveau ; $P(I \cap D) = 0,03$.

Correction de l'exercice 10 - Remonter à une branche

Premier niveau : $P(A) = 0,6$ et $P(\bar{A}) = 0,4$.

Second niveau : on divise la probabilité du chemin par celle de la première branche.

$$P_A(B) = \frac{0,42}{0,6} = 0,7 \quad P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

Puis $P_A(\bar{B}) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,5$ par la règle des nœuds.

Contrôle : $0,6 \times 0,7 = 0,42$ et $0,4 \times 0,5 = 0,2$.

Réponse. $P(\bar{A}) = 0,4$; $P_A(B) = 0,7$; $P_A(\bar{B}) = 0,3$; $P_{\bar{A}}(B) = P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,5$.

Correction de l'exercice 11 - Un chemin décrit par une phrase

« Acheter en magasin » est l'événement $\bar{L}$, « ne pas être satisfait » est $\bar{S}$. L'événement cherché est l'intersection $\bar{L} \cap \bar{S}$, qui correspond au dernier chemin de l'arbre.

On a $P(\bar{L}) = 0,55$ et $P_{\bar{L}}(\bar{S}) = 1 - 0,6 = 0,4$. Donc

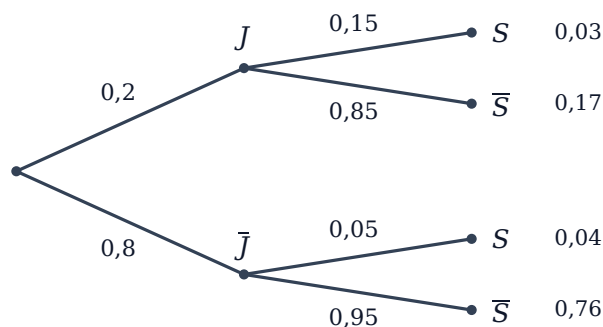
$$P(\bar{L} \cap \bar{S}) = 0,55 \times 0,4 = 0,22$$

22 % des clients ont acheté en magasin sans être satisfaits.

Réponse. $P(\bar{L} \cap \bar{S}) = 0,22$.

Correction de l'exercice 12 - Une assurance

On a $P(J) = 0,2$, $P_J(S) = 0,15$ et $P_{\bar{J}}(S) = 0,05$; on complète l'arbre avec la règle des nœuds.



J : conducteur de moins de 25 ans ; S : sinistre dans l'année.

On cherche $P(J \cap \bar{S})$, avec $P_{\bar{J}}(\bar{S}) = 0,85$:

$$P(J \cap \bar{S}) = 0,2 \times 0,85 = 0,17$$

17 % des assurés sont de jeunes conducteurs sans sinistre dans l'année.

Réponse. $P(J \cap \bar{S}) = 0,17$.

Correction de l'exercice 13 - Vérifier un arbre

Contrôle global : la somme des feuilles doit valoir 1.

$$0,24 + 0,36 + 0,12 + 0,18 = 0,9 \neq 1$$

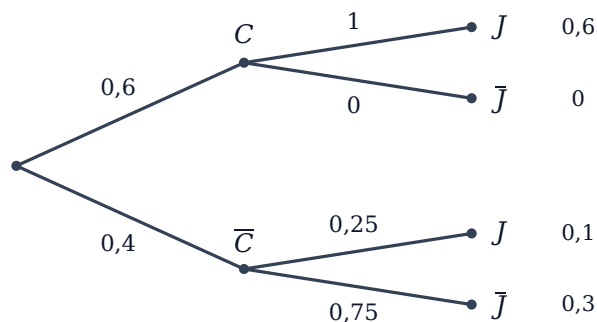
L'arbre n'est pas cohérent. On peut localiser l'erreur : les deux premières feuilles, issues de A , ont une somme de $0,6 = P(A)$, ce qui est correct. Les deux dernières, issues de $\bar{A}$, devraient avoir une somme de $P(\bar{A}) = 0,4$, et non $0,3$.

Sur la partie correcte : $P_A(B) = \frac{0,24}{0,6} = 0,4$ et $P_A(\bar{B}) = 0,6$.

Réponse. Non : les feuilles ont une somme de $0,9$; l'erreur est après $\bar{A}$.

Correction de l'exercice 14 - Un QCM au hasard

On note C « l'élève connaît la réponse » et J « la réponse est juste ». S'il connaît la réponse, il répond juste : $P_C(J) = 1$. S'il répond au hasard, une réponse sur quatre est juste : $P_{\bar{C}}(J) = 0,25$.



C : l'élève connaît la réponse ; J : la réponse est juste.

Le chemin « au hasard puis juste » a pour probabilité :

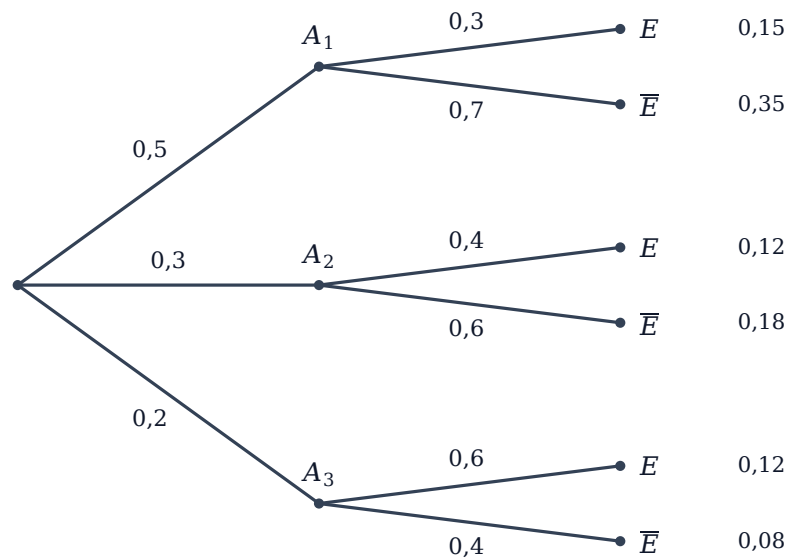
$$P(\bar{C} \cap J) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$$

Une branche de probabilité 0 ou 1 est tout à fait possible : elle traduit une certitude.

Réponse. $P(\bar{C} \cap J) = 0,1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le recrutement

a) Premier niveau : 0,5, 0,3 et 0,2. Second niveau : les taux d'embauche, qui sont des probabilités conditionnelles.



A_i : candidature reçue par l'agence i ; E : candidat embauché.

b) On multiplie le long du chemin :

$$P(A_2 \cap E) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$$

c) $P(A_1 \cap E) = 0,15$, $P(A_2 \cap E) = 0,12$ et $P(A_3 \cap E) = 0,12$. L'agence A_1 fournit le plus d'embauchés, alors que son taux d'embauche est le plus faible : elle envoie beaucoup plus de candidats.

Réponse. b) 0,12 — c) l'agence A_1 (0,15).