

Plaquette 1 - Probabilité conditionnelle : définition et tableaux

Probabilités conditionnelles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Pour un événement A de probabilité non nulle, la probabilité de B sachant A est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

C'est la proportion de B **parmi** les issues de A : l'univers est restreint à A .

Avec un tableau d'effectifs (situation d'équiprobabilité) :

$$P_A(B) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}$$

Conséquences.

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$;
- $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.

Lire un énoncé. « Parmi les A , 30 % sont B » donne $P_A(B) = 0,3$; « 30 % des personnes sont A et B » donne $P(A \cap B) = 0,3$. En général, $P_A(B) \neq P_B(A)$.

Correction de l'exercice 1 - Un tableau croisé

Toutes les issues sont équiprobables : on divise des effectifs.

- $P(F \cap D) = \frac{70}{200} = 0,35$: on divise par l'effectif **total**.
- $P_F(D) = \frac{70}{100} = 0,7$: parmi les **filles**, 70 sont demi-pensionnaires.
- $P_D(F) = \frac{70}{130} \approx 0,538$: parmi les **demi-pensionnaires**, 70 sont des filles.

Les trois calculs ont le même numérateur, 70, mais pas le même dénominateur :

$$P(F \cap D) = 0,35 \quad P_F(D) = 0,7 \quad P_D(F) \approx 0,538$$

C'est l'événement « sachant » qui fixe la population de référence.

Réponse. 0,35 ; 0,7 ; $\approx 0,538$.

Correction de l'exercice 2 - Traduire des phrases

On repère la population de référence : « parmi les... » ou « des... » désigne l'événement sachant lequel on calcule.

- a) La référence est l'ensemble des cadres : $P_C(T) = 0,4$.
- b) La référence est l'ensemble des salariés, et l'on parle des cadres **et** en télétravail : $P(C \cap T) = 0,12$.
- c) La référence est l'ensemble des télétravailleurs : $P_T(C) = 0,3$.
- d) $P(\overline{C}) = 0,7$.

On peut contrôler la cohérence de a), b) et d) avec la formule du cours :

$$P(C) = \frac{P(C \cap T)}{P_C(T)} = \frac{0,12}{0,4} = 0,3$$

et l'on retrouve bien $P(\overline{C}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Réponse. a) $P_C(T) = 0,4$ — b) $P(C \cap T) = 0,12$ — c) $P_T(C) = 0,3$ — d) $P(\overline{C}) = 0,7$.

Correction de l'exercice 3 - Appliquer la définition

On applique la définition, avec $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

Sachant A , les événements B et $\overline{B}$ se partagent toutes les issues, donc

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 0,75$$

Interprétation : un quart des issues de A réalisent B , les trois quarts restants ne le réalisent pas.

Réponse. $P_A(B) = 0,25$; $P_A(\overline{B}) = 0,75$.

Correction de l'exercice 4 - Retrouver une intersection

On note C « le client paie par carte » et S « il paie sans contact ». L'énoncé donne $P(C) = 0,6$ et $P_C(S) = 0,3$.

On cherche $P(C \cap S)$: on multiplie.

$$P(C \cap S) = P(C) \times P_C(S) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

18 % des clients paient par carte sans contact : 30 % de 60 %, et non 30 % de l'ensemble des clients.

Réponse. $P(C \cap S) = 0,18$.

Correction de l'exercice 5 - Le complémentaire sachant A

On note P « voyage en première » et R « a réservé un repas ». On a $P_P(R) = 0,35$, donc

$$P_P(\overline{R}) = 1 - 0,35 = 0,65$$

La seconde question porte sur une autre population : les voyageurs de seconde classe. L'information $P_P(R) = 0,35$ ne dit rien de $P_{\overline{P}}(R)$; seule la somme $P_P(R) + P_{\overline{P}}(\overline{R}) = 1$ est garantie, pas $P_P(R) + P_{\overline{P}}(R) = 1$.

Réponse. $P_P(\overline{R}) = 0,65$; non, $P_{\overline{P}}(R)$ est inconnu.

Correction de l'exercice 6 - Un dé équilibré

On a $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, $B = \{5 ; 6\}$ et $A \cap B = \{6\}$.

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5 \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

— Sachant que le résultat est pair, il reste 3 issues équiprobables, dont une seule (6) est dans B : $P_A(B) = \frac{1}{3}$.

— Sachant que le résultat est 5 ou 6, une issue sur deux est paire : $P_B(A) = \frac{1}{2}$.

Contrôle avec la définition : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

Réponse. $P(A) = 0,5$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P_A(B) = \frac{1}{3}$; $P_B(A) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 - Un jeu de cartes

Il y a 8 cœurs, 4 rois, et un seul roi de cœur.

— Sachant que la carte est un cœur, on est parmi 8 cartes, dont 1 roi :

$$P_C(R) = \frac{1}{8} = 0,125$$

— Sachant que la carte est un roi, on est parmi 4 cartes, dont 1 cœur : $P_R(C) = \frac{1}{4} = 0,25$.

Les deux probabilités sont différentes : inverser le conditionnement change la population de référence.

Réponse. $P_C(R) = 0,125$; $P_R(C) = 0,25$.

Correction de l'exercice 8 - Compléter un tableau en pourcentages

a) On note J « moins de 40 ans » et M « utilise l'application ».

	M	$\bar{M}$	Total
J	30	15	45
$\bar{J}$	20	35	55
Total	50	50	100

b) Parmi les moins de 40 ans :

$$P_J(M) = \frac{30}{45} \approx 0,667$$

Parmi les utilisateurs de l'application : $P_M(J) = \frac{30}{50} = 0,6$.

Deux jeunes sur trois utilisent l'application, et six utilisateurs sur dix sont jeunes.

Réponse. b) $P_J(M) \approx 0,667$; $P_M(J) = 0,6$.

Correction de l'exercice 9 - Calculer $P(A)$

De $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, on tire

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{0,12}{0,4} = 0,3$$

Ensuite, $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$, donc $P(A \cap \bar{B}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

Contrôle : $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0,12 + 0,18 = 0,3 = P(A)$.

Réponse. $P(A) = 0,3$; $P(A \cap \bar{B}) = 0,18$.

Correction de l'exercice 10 - Ne pas inverser le conditionnement

L'énoncé donne la proportion de tests positifs **parmi les malades** :

$$P_M(T) = 0,95$$

Le journaliste parle de la proportion de malades **parmi les tests positifs**, c'est-à-dire $P_T(M)$. Ce n'est pas la même population de référence, et rien n'oblige ces deux nombres à être égaux.

Quand la maladie est rare, beaucoup de tests positifs proviennent de personnes saines (faux positifs), et $P_T(M)$ peut être bien plus faible que 0,95 : un exercice de la plaquette sur les probabilités totales le montre.

Réponse. Il confond $P_M(T) = 0,95$ avec $P_T(M)$.

Correction de l'exercice 11 - Le télétravail par service

On divise, pour chaque service, l'effectif en télétravail par l'effectif du service :

$$P_{\text{Prod}}(T) = \frac{20}{250} = 0,08 \quad P_{\text{Com}}(T) = \frac{60}{150} = 0,4 \quad P_{\text{Adm}}(T) = \frac{70}{100} = 0,7$$

Le service administratif télétravaille le plus, en proportion : 70 % de ses salariés.

Pourtant, en effectifs, il ne compte que 70 télétravailleurs sur 150 : comparer des proportions demande de diviser par l'effectif de chaque groupe, pas par le total.

Réponse. 0,08 ; 0,4 ; 0,7 : le service administratif.

Correction de l'exercice 12 - Lire une phrase de sondage

a) $P(V) = 0,55$ et $P_V(U) = 0,4$.

b) On cherche $P(V \cap U)$:

$$P(V \cap U) = P(V) \times P_V(U) = 0,55 \times 0,4 = 0,22$$

soit 22 % des personnes interrogées.

c) Parmi les propriétaires, on cherche $P_V(\bar{U}) = 1 - 0,4 = 0,6$: 60 % d'entre eux.

Réponse. a) 0,55 et 0,4 — b) 0,22 — c) 0,6.

Correction de l'exercice 13 - Repérer une erreur de dénominateur

L'élève a calculé $P(F \cap D)$, la probabilité qu'un élève choisi au hasard **soit** une fille demi-pensionnaire. La question porte sur une fille : la population de référence est celle des 100 filles.

$$P_F(D) = \frac{70}{100} = 0,7$$

Repère pour ne pas se tromper : dans « la probabilité qu'une **fil**le soit... », l'événement F est déjà acquis, c'est lui qui fournit le dénominateur. On vérifie aussi que $P(F \cap D) = P(F) \times P_F(D) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$.

Réponse. $P_F(D) = 0,7$ (et non 0,35, qui est $P(F \cap D)$).

Correction de l'exercice 14 - Des ventes en ligne

a) On note T « commande passée depuis un téléphone » et R « commande retournée ».

	R	$\bar{R}$	Total
T	96	384	480
$\bar{T}$	48	272	320
Total	144	656	800

b) Parmi les 144 retours :

$$P_R(T) = \frac{96}{144} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

c) $P_T(R) = \frac{96}{480} = 0,2$ et $P_{\bar{T}}(R) = \frac{48}{320} = 0,15$: le téléphone a le taux de retour le plus élevé.

Réponse. b) $\frac{2}{3}$ — c) le téléphone (20 % contre 15 %).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un salon professionnel

a) $P(A) = \frac{200}{1000} = 0,2$; $P_N(A) = \frac{90}{450} = 0,2$; $P_S(A) = \frac{60}{350} \approx 0,171$; $P_E(A) = \frac{50}{200} = 0,25$.

b) Parmi les acheteurs :

$$P_A(E) = \frac{50}{200} = 0,25$$

Un acheteur sur quatre vient de l'Est.

c) Le taux d'achat de l'Est est 0,25, contre 0,2 en moyenne : il est 1,25 fois plus élevé, pas deux fois. L'organisateur se trompe.

Réponse. a) 0,2 ; 0,2 ; $\approx 0,171$; 0,25 — b) 0,25 — c) faux : 1,25 fois plus.