

Plaquette 3 – Formule des probabilités totales

Probabilités conditionnelles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Partition. Les événements A et $\bar{A}$ (ou A_1, A_2, A_3) forment une partition de l'univers : chaque issue appartient à un et un seul d'entre eux.

Formule des probabilités totales (partition en deux) :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Pour une partition en trois : $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$.

Sur l'arbre. $P(B)$ est la somme des feuilles des chemins qui se terminent par B .

Probabilité inversée. Une fois $P(B)$ connue :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Correction de l'exercice 1 – Une première probabilité totale

a) L et $\bar{L}$ forment une partition. Deux chemins mènent à S :

$$P(S) = P(L \cap S) + P(\bar{L} \cap S) = 0,45 \times 0,8 + 0,55 \times 0,6 = 0,36 + 0,33 = 0,69$$

69 % des clients sont satisfaits.

b) On cherche $P_S(L)$:

$$P_S(L) = \frac{P(L \cap S)}{P(S)} = \frac{0,36}{0,69} \approx 0,522$$

Un peu plus de la moitié des clients satisfaits ont acheté en ligne.

Réponse. a) $P(S) = 0,69$ — b) $P_S(L) \approx 0,522$.

Correction de l'exercice 2 – D'où viennent les pièces défectueuses ?

a) On note M « machine 1 » et D « défectueuse ». Par la formule des probabilités totales :

$$P(D) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029$$

2,9 % des pièces sont défectueuses.

$$b) P_D(M) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{0,014}{0,029} \approx 0,483.$$

Bien que la machine 1 produise 70 % des pièces, elle n'est à l'origine que de 48 % environ des défauts : c'est la machine 2 qu'il faut surveiller.

Réponse. a) 0,029 — b) $\approx 0,483$.

Correction de l'exercice 3 – Une partition en trois

a) F_1, F_2 et F_3 forment une partition. Trois chemins mènent à R :

$$P(R) = 0,5 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2 + 0,2 \times 0,3 = 0,05 + 0,06 + 0,06 = 0,17$$

$$b) P_R(F_3) = \frac{P(F_3 \cap R)}{P(R)} = \frac{0,06}{0,17} \approx 0,353.$$

Le troisième fournisseur ne livre que 20 % des commandes, mais il est responsable d'environ 35 % des retards.

Réponse. a) 0,17 — b) $\approx 0,353$.

Correction de l'exercice 4 - Le bus en retard

a) Par la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(P) \times P_P(R) + P(\bar{P}) \times P_{\bar{P}}(R) = 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,1 = 0,12 + 0,07 = 0,19$$

b) $P_R(P) = \frac{0,12}{0,19} \approx 0,632$.

Il ne pleut qu'un jour sur trois environ, mais près de deux retards sur trois ont lieu un jour de pluie.

Réponse. a) 0,19 — b) $\approx 0,632$.

Correction de l'exercice 5 - Un test de dépistage

a) Deux chemins mènent à T :

$$P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,03 = 0,019 + 0,0294 = 0,0484$$

b) $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,0484} \approx 0,393$.

Seulement 39 % environ des tests positifs correspondent à des malades : la maladie est rare, et les faux positifs (0,0294) sont plus nombreux que les vrais (0,019). C'est pourquoi un test positif est toujours confirmé par un second examen.

Réponse. a) 0,0484 — b) $\approx 0,393$.

Correction de l'exercice 6 - Démontrer la formule

Une issue de B est soit dans A , soit dans $\bar{A}$, jamais dans les deux. L'événement B est donc la réunion des deux événements **incompatibles** $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$, et les probabilités s'ajoutent :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Chaque intersection se calcule par la définition de la probabilité conditionnelle, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$, d'où la formule des probabilités totales. Sur l'arbre, ce sont les deux chemins qui aboutissent à B .

Réponse. B est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$.

Correction de l'exercice 7 - Retrouver $P(A)$

La formule des probabilités totales s'écrit avec l'inconnue x :

$$P(B) = x \times 0,8 + (1 - x) \times 0,3$$

D'où $0,8x + 0,3 - 0,3x = 0,5$, soit $0,5x = 0,2$ et $x = 0,4$.

Contrôle : $0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,3 = 0,32 + 0,18 = 0,5$.

Réponse. $P(A) = 0,4$.

Correction de l'exercice 8 - Les sinistres d'un assureur

a) Avec J « jeune conducteur » et S « sinistre » :

$$P(S) = 0,2 \times 0,15 + 0,8 \times 0,05 = 0,03 + 0,04 = 0,07$$

$$b) P_S(J) = \frac{0,03}{0,07} \approx 0,429.$$

Les jeunes conducteurs ne représentent que 20 % des assurés, mais près de 43 % des sinistres : c'est ce qui justifie une prime plus élevée.

Réponse. a) 0,07 — b) $\approx 0,429$.

Correction de l'exercice 9 - Une réponse juste au QCM

a) Avec C « il connaît la réponse » et J « réponse juste », $P_C(J) = 1$ et $P_{\bar{C}}(J) = 0,25$:

$$P(J) = 0,6 \times 1 + 0,4 \times 0,25 = 0,6 + 0,1 = 0,7$$

$$b) P_J(C) = \frac{0,6}{0,7} = \frac{6}{7} \approx 0,857.$$

Une réponse juste n'est donc pas une preuve que l'élève savait : dans environ 14 % des cas, c'est la chance.

Réponse. a) 0,7 — b) $\frac{6}{7} \approx 0,857$.

Correction de l'exercice 10 - Les candidats embauchés

a) La formule des probabilités totales, pour une partition en trois :

$$P(E) = 0,5 \times 0,3 + 0,3 \times 0,4 + 0,2 \times 0,6 = 0,15 + 0,12 + 0,12 = 0,39$$

$$b) P_E(A_3) = \frac{0,12}{0,39} \approx 0,308.$$

Le taux d'embauche global, 39 %, n'est pas la moyenne des trois taux ($\approx 43,3\%$) : chaque taux est pondéré par la part de l'agence.

Réponse. a) 0,39 — b) $\approx 0,308$.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

Première erreur : il additionne deux probabilités conditionnelles, calculées sur deux populations différentes. Le résultat $1,4 > 1$ ne peut pas être une probabilité.

Seconde erreur : la moyenne simple donne le même poids aux deux groupes, alors que les clients en ligne ne sont que 45 %. Il faut pondérer chaque taux par la taille du groupe :

$$P(S) = 0,45 \times 0,8 + 0,55 \times 0,6 = 0,69$$

La moyenne simple ne serait juste que si les deux groupes avaient la même taille ($P(L) = 0,5$).

Réponse. Il faut pondérer : $P(S) = 0,69$.

Correction de l'exercice 12 - Deux urnes

$$a) P(U_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } P(U_2) = \frac{2}{3} ; P_{U_1}(R) = \frac{2}{5} \text{ et } P_{U_2}(R) = \frac{4}{5}.$$

$$P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$b) P_R(U_1) = \frac{2/15}{10/15} = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Les fractions évitent ici les arrondis : on garde des valeurs exactes jusqu'au bout.

Réponse. a) $\frac{2}{3}$ — b) 0,2.

Correction de l'exercice 13 - Le risque de crédit

a) Par la formule des probabilités totales :

$$P(D) = 0,3 \times 0,02 + 0,5 \times 0,05 + 0,2 \times 0,12 = 0,006 + 0,025 + 0,024 = 0,055$$

Le taux de défaut global est de 5,5 %.

b) $P_D(C) = \frac{0,024}{0,055} \approx 0,436$: le profil C, qui ne représente qu'un cinquième des emprunteurs, provient de près de 44 % des défauts.

Réponse. a) 0,055 — b) $\approx 0,436$.

Correction de l'exercice 14 - La ponctualité de trois lignes

a) On note H « le bus est à l'heure ».

$$P(H) = 0,5 \times 0,9 + 0,3 \times 0,8 + 0,2 \times 0,6 = 0,45 + 0,24 + 0,12 = 0,81$$

b) $P(\overline{H}) = 0,19$ et $P(L_3 \cap \overline{H}) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$, donc

$$P_{\overline{H}}(L_3) = \frac{0,08}{0,19} \approx 0,421$$

Plus de 42 % des retards ont lieu sur la ligne 3, qui ne porte que 20 % des trajets.

Réponse. a) 0,81 — b) $\approx 0,421$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la vaccination

a) Avec V « vacciné » et G « grippé » : $P(V) = 0,6$, $P_V(G) = 0,04$, $P_{\overline{V}}(G) = 0,15$.

$$P(G) = 0,6 \times 0,04 + 0,4 \times 0,15 = 0,024 + 0,06 = 0,084$$

b) $P_G(V) = \frac{0,024}{0,084} \approx 0,286$, soit environ 29 %.

c) Le journal confond $P_G(V)$ et $P_V(G)$. Il faut comparer le risque de tomber malade dans chaque groupe : 4 % chez les vaccinés contre 15 % chez les non-vaccinés. Le vaccin divise le risque par près de 4 ; il y a des vaccinés parmi les malades simplement parce que la majorité de la population est vaccinée.

Réponse. a) 0,084 — b) $\approx 0,286$ — c) il faut comparer $P_V(G) = 0,04$ et $P_{\overline{V}}(G) = 0,15$.