

Plaquette 4 - Indépendance de deux événements

Probabilités conditionnelles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Soit A un événement de probabilité non nulle. B est **indépendant** de A si

$$P_A(B) = P(B)$$

Savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Caractérisation. Pour $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

La propriété est **symétrique** : si B est indépendant de A , alors A est indépendant de B . Les contraires $\bar{A}$ et $\bar{B}$ de deux événements indépendants sont aussi indépendants (admis).

Sur un arbre. A et B sont indépendants quand les branches B du second niveau portent la même probabilité après A et après $\bar{A}$.

À ne pas confondre. Incompatibles : $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont **jamais** indépendants.

Correction de l'exercice 1 - Avec un dé

On a $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(C) = \frac{1}{2}$.

— $A \cap B = \{2\}$, donc $P_A(B) = \frac{1}{3}$ (une issue sur les trois issues paires). Comme

$$P_A(B) = P(B), A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}$$

— $A \cap C = \{4; 6\}$, donc

$$P_A(C) = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = P(C)$$

A et C ne sont pas indépendants : savoir que le résultat est pair rend plus probable qu'il soit grand.

Réponse. A et B indépendants ; A et C non.

Correction de l'exercice 2 - Tester avec le produit

On compare $P(A \cap B)$ au produit $P(A) \times P(B)$.

a) $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 = P(A \cap B)$: **indépendants**.

b) Le produit vaut

$$P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18 \neq 0,15$$

Non indépendants. Ici $P_A(B) = \frac{0,15}{0,3} = 0,5 < 0,6 = P(B)$: savoir que A est réalisé rend B moins probable.

Réponse. a) indépendants — b) non indépendants.

Correction de l'exercice 3 - Un tableau d'effectifs

On compare la proportion de buveurs de café chez les hommes à la proportion globale :

$$P_H(C) = \frac{144}{240} = 0,6 \quad P(C) = \frac{240}{400} = 0,6$$

Les deux sont égales : **H et C sont indépendants**. On vérifie aussi chez les femmes :

$$P_{\overline{H}}(C) = \frac{96}{160} = 0,6.$$

Dans cette entreprise, le genre ne dit rien de la consommation de café : la proportion est la même dans chaque groupe.

Réponse. Oui : $P_H(C) = P(C) = 0,6$.

Correction de l'exercice 4 - Une indépendance symétrique

Par définition de la probabilité conditionnelle, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Avec l'hypothèse $P_A(B) = P(B)$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

On calcule alors $P_B(A)$, ce qui est possible car $P(B) \neq 0$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Si B est indépendant de A , alors A est indépendant de B : on peut donc dire « A et B sont indépendants ».

Réponse. $P_B(A) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Correction de l'exercice 5 - Deux pannes indépendantes

On note P_1 et P_2 les événements « la machine 1 (ou 2) est en panne ».

a) Les pannes sont indépendantes : on multiplie.

$$P(P_1 \cap P_2) = 0,05 \times 0,08 = 0,004$$

b) « Au moins une machine fonctionne » est le contraire de « les deux sont en panne » : $1 - 0,004 = 0,996$.

c) « Au moins une panne » est le contraire de « aucune panne ». Les deux machines fonctionnent avec la probabilité $0,95 \times 0,92 = 0,874$ (les contraires d'événements indépendants sont aussi indépendants), d'où $1 - 0,874 = 0,126$.

Réponse. a) 0,004 — b) 0,996 — c) 0,126.

Correction de l'exercice 6 - Lire l'indépendance sur un arbre

Après A comme après $\overline{A}$, la branche B porte la même probabilité, 0,7 : savoir si A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Par la formule des probabilités totales :

$$P(B) = 0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,7 = 0,21 + 0,49 = 0,7$$

On a bien $P_A(B) = 0,7 = P(B)$: **A et B sont indépendants**.

Réponse. Oui : $P_A(B) = P(B) = 0,7$.

Correction de l'exercice 7 - Incompatibles ou indépendants ?

Une carte ne peut pas être à la fois cœur et pique : $C \cap P = \emptyset$, les événements sont **incompatibles**, et $P(C \cap P) = 0$.

Pour l'indépendance, on compare au produit :

$$P(C) \times P(P) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq 0$$

Ils ne sont **pas indépendants** : savoir que la carte est un cœur rend impossible qu'elle soit un pique, ce qui modifie fortement la probabilité de P . Incompatibilité et indépendance sont deux notions très différentes.

Réponse. Incompatibles, mais pas indépendants.

Correction de l'exercice 8 - Tirages avec et sans remise

Avec remise, l'urne est la même au second tirage : $P_{R_1}(R_2) = P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,6$, et $P(R_2) = 0,6$. Les événements sont indépendants.

Sans remise, $P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{4} = 0,5$ et $P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{3}{4} = 0,75$. Par les probabilités totales :

$$P(R_2) = 0,6 \times 0,5 + 0,4 \times 0,75 = 0,6$$

Comme $P_{R_1}(R_2) = 0,5 \neq 0,6$, les événements **ne sont pas indépendants** : le premier tirage modifie la composition de l'urne.

Réponse. Indépendants avec remise ; non indépendants sans remise.

Correction de l'exercice 9 - Utiliser l'indépendance

Les événements sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$:

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2$$

Ensuite, par indépendance, $P_A(B) = P(B) = 0,2$, d'où $P_A(\overline{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

On retrouve que $P_A(\overline{B}) = P(\overline{B})$: A et $\overline{B}$ sont eux aussi indépendants.

Réponse. $P(B) = 0,2$; $P_A(\overline{B}) = 0,8$.

Correction de l'exercice 10 - Deux défauts indépendants

On note F et C les deux défauts.

a) Par indépendance : $P(F \cap C) = 0,03 \times 0,02 = 0,0006$.

b) Les événements contraires sont aussi indépendants :

$$P(\overline{F} \cap \overline{C}) = 0,97 \times 0,98 = 0,9506$$

c) « Au moins un défaut » est le contraire de « aucun défaut » : $1 - 0,9506 = 0,0494$.

Attention : $0,03 + 0,02 = 0,05$ compterait deux fois les pièces qui ont les deux défauts.

Réponse. a) 0,0006 — b) 0,9506 — c) 0,0494.

Correction de l'exercice 11 - Les retours de commandes

On compare le taux de retour des commandes passées depuis un téléphone au taux global :

$$P_T(R) = \frac{96}{480} = 0,2 \quad P(R) = \frac{144}{800} = 0,18$$

$P_T(R) \neq P(R)$: les événements **ne sont pas indépendants**. Les commandes passées depuis un téléphone sont un peu plus souvent retournées.

Vérification par le produit : $P(T) \times P(R) = 0,6 \times 0,18 = 0,108$, alors que

$$P(T \cap R) = \frac{96}{800} = 0,12.$$

Réponse. Non : $P_T(R) = 0,2 \neq 0,18 = P(R)$.

Correction de l'exercice 12 - Un dé et une pièce

Les deux expériences n'ont aucune influence l'une sur l'autre : les événements liés au dé sont indépendants des événements liés à la pièce.

$$P(6 \cap \text{pile}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Pour « pair ou face », on passe par le contraire, « impair et pile » :

$$P(\text{impair} \cap \text{pile}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

d'où $P(\text{pair ou face}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Réponse. $\frac{1}{12}$; $\frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 13 - Repérer une erreur

Pour des événements indépendants, la probabilité de l'intersection est le **produit** des probabilités, pas leur somme :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$$

La somme 0,9 ne peut d'ailleurs pas convenir : $A \cap B$ est inclus dans B , donc sa probabilité ne peut pas dépasser $P(B) = 0,4$.

Enfin, par indépendance, $P_A(B) = P(B) = 0,4$; on le vérifie : $\frac{0,2}{0,5} = 0,4$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0,2$; $P_A(B) = 0,4$.

Correction de l'exercice 14 - Un sondage d'opinion

On compare $P(J \cap V)$ au produit $P(J) \times P(V)$:

$$P(J) \times P(V) = 0,55 \times 0,4 = 0,22 = P(J \cap V)$$

Les événements J et V sont **indépendants**.

Interprétation : $P_J(V) = \frac{0,22}{0,55} = 0,4$, la même proportion que dans l'ensemble de la population. Dans cette ville, l'âge n'influence pas l'opinion sur la piste cyclable.

Réponse. Oui : $P(J \cap V) = P(J) \times P(V) = 0,22$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux contrôles

On note D_1 et D_2 « le contrôle 1 (ou 2) détecte le défaut ».

a) Par indépendance : $P(D_1 \cap D_2) = 0,9 \times 0,8 = 0,72$.

b) Les contraires sont indépendants :

$$P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$$

c) Le défaut est détecté par au moins un contrôle avec la probabilité $1 - 0,02 = 0,98$. C'est moins que 0,99 : les deux contrôles ne suffisent pas. Un troisième contrôle indépendant, même peu efficace, réduirait encore la probabilité de laisser passer un défaut.

Réponse. a) 0,72 — b) 0,02 — c) non : $0,98 < 0,99$.