

Plaque 5 – Problèmes de synthèse

Probabilités conditionnelles – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

La démarche.

1. Nommer les événements et traduire chaque donnée : $P(A)$, $P_A(B)$ ou $P(A \cap B)$. 2. Construire l'arbre ; compléter avec la règle des nœuds. 3. Multiplier le long d'un chemin : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. 4. Additionner les chemins qui mènent à B :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

5. Inverser si besoin : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. 6. Indépendance : comparer $P_A(B)$ et $P(B)$.

Contrôles. Toute probabilité est entre 0 et 1 ; les feuilles de l'arbre ont une somme égale à 1.

Correction de l'exercice 1 – Un contrôle antidopage

On note D « le sportif est dopé » et T « le test est positif ».

a) Par la formule des probabilités totales :

$$P(T) = 0,05 \times 0,98 + 0,95 \times 0,01 = 0,049 + 0,0095 = 0,0585$$

b) $P_T(D) = \frac{0,049}{0,0585} \approx 0,838$.

c) $P(\bar{T}) = 1 - 0,0585 = 0,9415$ et $P(D \cap \bar{T}) = 0,05 \times 0,02 = 0,001$, d'où

$$P_{\bar{T}}(D) = \frac{0,001}{0,9415} \approx 0,001 : \text{un test négatif est très rassurant, un test positif l'est moins.}$$

Réponse. a) 0,0585 — b) $\approx 0,838$ — c) $\approx 0,001$.

Correction de l'exercice 2 – Un filtre anti-spam

On note S « spam » et I « classé indésirable ».

a) Probabilités totales :

$$P(I) = 0,6 \times 0,95 + 0,4 \times 0,02 = 0,57 + 0,008 = 0,578$$

b) On cherche $P_I(\bar{S})$:

$$P_I(\bar{S}) = \frac{P(\bar{S} \cap I)}{P(I)} = \frac{0,008}{0,578} \approx 0,014$$

Environ 1,4 % du dossier « indésirable » est fait de vrais courriels : il vaut la peine d'y jeter un œil de temps en temps.

Réponse. a) 0,578 — b) $\approx 0,014$.

Correction de l'exercice 3 – Fidéliser des abonnés

a) Premier niveau : $P(R_1) = 0,8$ et $P(\bar{R}_1) = 0,2$. Second niveau : $P_{R_1}(R_2) = 0,9$ et $P_{\bar{R}_1}(R_2) = 0,3$, complétés par 0,1 et 0,7.

b) Probabilités totales :

$$P(R_2) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,3 = 0,72 + 0,06 = 0,78$$

c) $P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{0,06}{0,78} \approx 0,077$: moins de 8 % des abonnés de la deuxième année sont des « revenants ».

Réponse. b) 0,78 — c) $\approx 0,077$.

Correction de l'exercice 4 - Une branche inconnue

On note $x = P_{\overline{A}}(B)$. La formule des probabilités totales donne :

$$0,3 \times 0,6 + 0,7x = 0,46 \Leftrightarrow 0,18 + 0,7x = 0,46 \Leftrightarrow x = \frac{0,28}{0,7} = 0,4$$

Donc $P_{\overline{A}}(B) = 0,4$.

Pour l'indépendance, on compare $P_A(B) = 0,6$ et $P(B) = 0,46$: ils sont différents, donc A et B ne sont pas indépendants.

Réponse. $P_{\overline{A}}(B) = 0,4$; non indépendants.

Correction de l'exercice 5 - Quand les deux branches sont égales

On note $a = P(A)$. Par la formule des probabilités totales :

$$P(B) = a \times p + (1 - a) \times p = p(a + 1 - a) = p$$

Ainsi $P_A(B) = p = P(B)$: par définition, B est indépendant de A .

Sur un arbre, l'indépendance se voit donc directement : la branche B porte la même probabilité au second niveau, quelle que soit la branche du premier niveau.

Réponse. $P(B) = ap + (1 - a)p = p = P_A(B)$.

Correction de l'exercice 6 - Deux boules de couleurs différentes

Deux chemins de l'arbre conduisent à deux couleurs différentes : « rouge puis bleue » et « bleue puis rouge ».

$$P(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 0,3 \quad P(\overline{R_1} \cap R_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 0,3$$

Ces deux chemins sont incompatibles, on additionne : $P = 0,3 + 0,3 = 0,6$.

Contrôle : deux rouges (0,3) et deux bleues (0,1) complètent bien à 1 : $0,6 + 0,3 + 0,1 = 1$.

Réponse. 0,6.

Correction de l'exercice 7 - Une question sensible

a) On note O « répondre oui ». Avec un arbre « pile / face » puis « oui / non » :

$$P(O) = 0,5 \times p + 0,5 \times 1 = 0,5p + 0,5$$

b) On résout $0,5p + 0,5 = 0,6$, soit $0,5p = 0,1$ et $p = 0,2$.

Environ 20 % des salariés ont déjà triché. Aucun « oui » individuel n'est compromettant, puisqu'il peut venir de la pièce : c'est ce qui rend les réponses plus sincères.

Réponse. a) $P(O) = 0,5p + 0,5$ — b) $p = 0,2$.

Correction de l'exercice 8 - Une assurance habitation

a) Partition en trois :

$$P(S) = 0,5 \times 0,04 + 0,35 \times 0,07 + 0,15 \times 0,1 = 0,02 + 0,0245 + 0,015 = 0,0595$$

b) $P_S(M) = \frac{0,0245}{0,0595} \approx 0,412$.

c) $P_M(S) = 0,07$ et $P(S) = 0,0595$ sont différents : les événements ne sont pas indépendants. Les maisons ont un risque de sinistre plus élevé que la moyenne.

Réponse. a) 0,0595 — b) $\approx 0,412$ — c) non.

Correction de l'exercice 9 - Du tableau à l'arbre

a) $P(N) = \frac{150}{250} = 0,6$; $P_N(C) = \frac{90}{150} = 0,6$; $P_{\bar{N}}(C) = \frac{40}{100} = 0,4$.

b) Probabilités totales :

$$P(C) = 0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0,4 = 0,36 + 0,16 = 0,52$$

Avec les effectifs : $\frac{90 + 40}{250} = \frac{130}{250} = 0,52$.

c) $P_N(C) = 0,6 \neq 0,52 = P(C)$: N et C ne sont pas indépendants ; les nageurs participent davantage aux compétitions.

Réponse. b) 0,52 — c) non : $P_N(C) = 0,6 \neq 0,52$.

Correction de l'exercice 10 - Garantie et pannes

a) Avec P « panne » :

$$P(P) = 0,4 \times 0,05 + 0,35 \times 0,08 + 0,25 \times 0,1 = 0,02 + 0,028 + 0,025 = 0,073$$

b) $P_P(C) = \frac{0,025}{0,073} \approx 0,342$.

c) Si la marque n'avait aucune influence, on aurait $P_A(P) = P_B(P) = P_C(P) = P(P)$. Or ces probabilités valent 0,05, 0,08 et 0,1, contre 0,073 : les événements ne sont pas indépendants, et le vendeur a tort.

Réponse. a) 0,073 — b) $\approx 0,342$ — c) faux : les taux de panne diffèrent selon la marque.

Correction de l'exercice 11 - Deux opinions et une indépendance

a) Par indépendance, on multiplie :

$$P(Q \cap E) = 0,4 \times 0,7 = 0,28 \quad P(Q \cap \bar{E}) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

b) $P_Q(E) = \frac{P(Q \cap E)}{P(Q)} = \frac{0,28}{0,4} = 0,7$.

On retrouve $P(E)$: c'est exactement ce que dit l'indépendance, $P_Q(E) = P(E)$. Être favorable ne renseigne pas sur le fait d'avoir des enfants.

Réponse. a) 0,28 et 0,12 — b) 0,7.

Correction de l'exercice 12 - Une machine à café

a) Probabilités totales, avec $P(P_1) = 0,1$, $P_{P_1}(P_2) = 0,4$ et $P_{\bar{P}_1}(P_2) = 0,1$:

$$P(P_2) = 0,1 \times 0,4 + 0,9 \times 0,1 = 0,04 + 0,09 = 0,13$$

b) $P_{P_1}(P_2) = 0,4 \neq 0,13 = P(P_2)$: les événements ne sont pas indépendants.

Une panne a tendance à durer : savoir que la machine est en panne un jour rend une panne le lendemain trois fois plus probable.

Réponse. a) 0,13 — b) non : $0,4 \neq 0,13$.

Correction de l'exercice 13 - Le choix d'une option

a) On note R « réussite ».

$$P(R) = 0,45 \times 0,9 + 0,35 \times 0,8 + 0,2 \times 0,7 = 0,405 + 0,28 + 0,14 = 0,825$$

b) $P(\bar{R}) = 0,175$ et $P(C \cap \bar{R}) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$, donc

$$P_{\bar{R}}(C) = \frac{0,06}{0,175} \approx 0,343$$

Un échec sur trois environ vient de l'option C, qui ne regroupe qu'un cinquième des élèves.

Réponse. a) $0,825$ — b) $\approx 0,343$.

Correction de l'exercice 14 - Repérer les erreurs d'un raisonnement

Première erreur : il multiplie deux probabilités conditionnelles. Il faut additionner les **chemins** qui mènent à T , chacun étant un produit :

$$P(T) = 0,1 \times 0,9 + 0,9 \times 0,2 = 0,09 + 0,18 = 0,27$$

Seconde erreur : il confond $P_T(M)$ avec $P_M(T) = 0,9$. Par la définition :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,09}{0,27} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

Un test positif sur trois seulement correspond à une personne malade.

Réponse. $P(T) = 0,27$; $P_T(M) = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la livraison à domicile

a) Partition en trois :

$$P(A) = 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,06 = 0,01 + 0,012 + 0,012 = 0,034$$

b) $P_A(T_3) = \frac{0,012}{0,034} \approx 0,353$.

c) On note x le taux de T_3 . On veut $0,01 + 0,012 + 0,2x < 0,03$, soit $0,2x < 0,008$ et $x < 0,04$.

L'enseigne doit exiger de T_3 moins de 4 % de colis abîmés, au lieu de 6 %.

Réponse. a) $0,034$ — b) $\approx 0,353$ — c) moins de 4 %.