

Plaquette 5 – Problèmes de synthèse

Probabilités conditionnelles – Terminale STMG

Exercices

Méthode

Des problèmes complets dans l'esprit du bac : traduire l'énoncé en probabilités, construire l'arbre, appliquer la formule des probabilités totales, « inverser » un conditionnement, et se prononcer sur une indépendance. On termine toujours par une phrase qui répond à la question posée dans son contexte.

Exercice 1 – Un contrôle antidopage

Lors d'une compétition, 5 % des sportifs sont dopés. Le test est positif chez 98 % des sportifs dopés et chez 1 % des sportifs non dopés.

- Calculer la probabilité qu'un test soit positif.
- Un test est positif. Quelle est la probabilité que le sportif soit dopé ?
- Un test est négatif. Quelle est la probabilité que le sportif soit dopé ?

Exercice 2 – Un filtre anti-spam

60 % des courriels reçus par une entreprise sont des spams. Le filtre classe en « indésirable » 95 % des spams et 2 % des courriels légitimes.

- Quelle proportion des courriels est classée « indésirable » ?
- Quelle proportion des courriels classés « indésirable » sont en réalité légitimes ?

Exercice 3 – Fidéliser des abonnés

Un magazine constate que 80 % de ses abonnés renouvellent leur abonnement la première année. Parmi ceux qui ont renouvelé, 90 % renouvellent encore l'année suivante ; parmi ceux qui ne l'ont pas fait, 30 % se réabonnent l'année suivante.

- Construire l'arbre (R_1 , puis R_2).
- Calculer la probabilité qu'un abonné soit abonné la deuxième année (R_2).
- Un abonné est abonné la deuxième année. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas renouvelé la première ?

Exercice 4 – Une branche inconnue

Dans un arbre « A puis B », on connaît $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,6$ et $P(B) = 0,46$. Déterminer $P_{\bar{A}}(B)$, puis dire si A et B sont indépendants.

Exercice 5 – Quand les deux branches sont égales

Dans un arbre « A puis B », on suppose $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = p$, avec $0 < P(A) < 1$. Montrer que $P(B) = p$ et en déduire que A et B sont indépendants.

Exercice 6 – Deux boules de couleurs différentes

Une urne contient 3 boules rouges et 2 bleues. On tire deux boules successivement, sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?

Exercice 7 – Une question sensible

Pour estimer la proportion p de salariées qui ont déjà triché sur leurs notes de frais, on utilise une méthode anonyme : chaque salarié lance une pièce en secret. Sur « pile », il répond honnêtement ; sur « face », il répond « oui » quoi qu'il en soit. On obtient 60 % de « oui ».

- a) Exprimer la probabilité de répondre « oui » en fonction de p .
- b) En déduire une estimation de p .

Exercice 8 – Une assurance habitation

Un assureur couvre des appartements (50 % des contrats), des maisons (35 %) et des locaux professionnels (15 %). Dans l'année, un sinistre est déclaré pour 4 % des appartements, 7 % des maisons et 10 % des locaux.

- a) Calculer la probabilité qu'un contrat donne lieu à un sinistre.
- b) Un sinistre est déclaré. Quelle est la probabilité qu'il concerne une maison ?
- c) Le type « maison » et l'événement « sinistre » sont-ils indépendants ?

Exercice 9 – Du tableau à l'arbre

Dans un club de 250 adhérents, 150 pratiquent la natation (N) ; parmi eux, 90 participent aux compétitions (C). Parmi les autres adhérents, 40 participent aux compétitions.

- a) Construire l'arbre « N puis C » avec des probabilités.
- b) Calculer $P(C)$ et vérifier avec les effectifs.
- c) N et C sont-ils indépendants ?

Exercice 10 – Garantie et pannes

Un magasin vend trois marques de lave-linge : A (40 % des ventes), B (35 %) et C (25 %). Pendant la garantie, 5 % des machines A, 8 % des B et 10 % des C tombent en panne.

- a) Calculer la probabilité qu'une machine vendue tombe en panne pendant la garantie.
- b) Une machine est revenue en panne. Quelle est la probabilité qu'elle soit de marque C ?
- c) Le vendeur affirme : « la marque n'a aucune influence sur les pannes ». Qu'en penser ?

Exercice 11 – Deux opinions et une indépendance

Dans une entreprise, 40 % des salariés sont favorables à la semaine de quatre jours (Q). 70 % des salariés ont des enfants (E), et ces deux caractères sont indépendants.

- a) Calculer $P(Q \cap E)$ et $P(Q \cap \bar{E})$.

b) Un salarié favorable est choisi au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait des enfants ?

Exercice 12 – Une machine à café

Une machine à café tombe en panne un jour donné avec la probabilité 0,1. Si elle est en panne un jour, elle l'est encore le lendemain avec la probabilité 0,4 ; si elle fonctionne, elle tombe en panne le lendemain avec la probabilité 0,1. On note P_1 et P_2 « la machine est en panne le jour 1 (le jour 2) ».

- a) Calculer $P(P_2)$.
- b) Les événements P_1 et P_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 13 – Le choix d'une option

En Terminale, 45 % des élèves choisissent l'option A, 35 % l'option B et 20 % l'option C. Le taux de réussite à l'examen de l'option est de 90 % pour A, 80 % pour B et 70 % pour C.

- a) Quel est le taux de réussite global ?
- b) Un élève a échoué. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'option C ?

Exercice 14 – Repérer les erreurs d'un raisonnement

Un élève étudie un test : $P(M) = 0,1$, $P_M(T) = 0,9$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,2$. Il écrit : « $P(T) = 0,9 \times 0,2 = 0,18$, et $P_T(M) = 0,9$ ». Corriger ses deux erreurs.

Exercice 15 – Synthèse : la livraison à domicile

Une enseigne livre ses clients par trois transporteurs : T_1 (50 % des colis), T_2 (30 %) et T_3 (20 %). Un colis est abîmé (A) dans 2 % des cas avec T_1 , 4 % avec T_2 et 6 % avec T_3 .

- a) Construire l'arbre et calculer la probabilité qu'un colis soit abîmé.
- b) Un client reçoit un colis abîmé. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par T_3 ?
- c) L'enseigne veut que moins de 3 % des colis soient abîmés. Quel taux maximal de colis abîmés devrait-elle imposer à T_3 , les autres taux restant inchangés ?