

Plaquette 1 - Arbres, loi binomiale et loi normale

Probabilités : lois binomiale et normale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- **Probabilité conditionnelle** : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Dans un **arbre pondéré** : la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités portées ; la somme des branches partant d'un même nœud vaut 1.
- **Formule des probabilités totales** (avec A et $\bar{A}$) :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

- **Loi binomiale** $B(n; p)$: n épreuves identiques et indépendantes, probabilité de succès p , et X compte les succès.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad E(X) = np \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

- « Au moins un succès » : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.
- **Loi normale** $N(\mu; \sigma^2)$: loi d'une grandeur continue, courbe en cloche symétrique autour de μ . $P(X \leq \mu) = 0,5$.
- Intervalles de référence :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

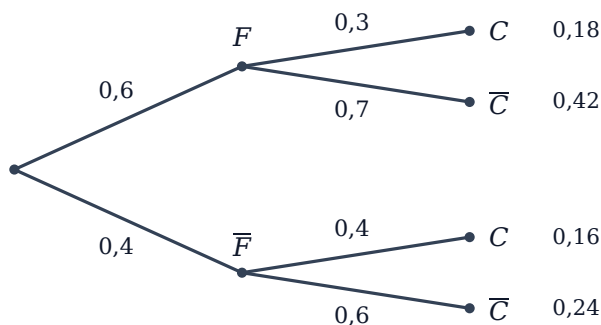
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

- Choisir la loi : **binomiale** si l'on compte un nombre de succès (variable discrète) ; **normale** pour une mesure continue (masse, durée, longueur).

Correction de l'exercice 1 - Probabilité conditionnelle

- a) $P(F) = 0,6$; $P_F(C) = 0,3$ (probabilité d'être cadre **sachant** que c'est une femme) ; $P_{\bar{F}}(C) = 0,4$.

Arbre pondéré de la situation :



Femme (F) ou homme, puis cadre (C)

- b) Formule du cours : $P(F \cap C) = P(F) \times P_F(C)$.

$$P(F \cap C) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

— Interprétation : 18 % des salariés sont des femmes cadres.

Piège. $P_F(C) = 0,3$ ne signifie pas que 30 % des salariés sont des femmes cadres : le pourcentage porte sur les femmes seulement.

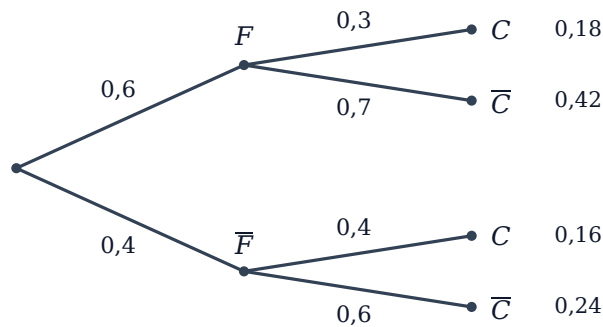
Réponse. a) 0,6 ; 0,3 ; 0,4 · b) $P(F \cap C) = 0,18$.

Correction de l'exercice 2 - Probabilités totales

On applique la formule des probabilités totales, en distinguant les deux branches de l'arbre.

$$P(C) = P(F) \times P_F(C) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(C)$$

Sur l'arbre :



Deux chemins mènent à C

- $P(\bar{F}) = 1 - 0,6 = 0,4$.
- $P(C) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34$.
- Donc 34 % des salariés sont cadres.
- Cohérence : le résultat est compris entre 30 % et 40 %, les deux taux de départ. C'est toujours le cas d'une moyenne pondérée.

Réponse. $P(C) = 0,34$.

Correction de l'exercice 3 - Probabilité conditionnelle inverse

On cherche $P_C(F)$, c'est-à-dire la probabilité d'être une femme **sachant** qu'on est cadre. On applique la définition :

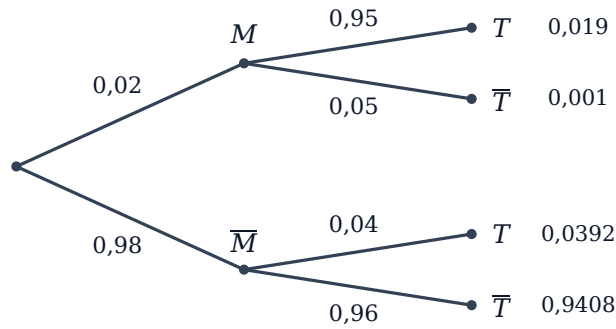
$$P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0,18}{0,34} \approx 0,529$$

- Environ 52,9 % des cadres sont des femmes.
- À comparer avec $P_F(C) = 0,3$: les deux probabilités conditionnelles sont **très différentes**, elles ne répondent pas à la même question. C'est le piège classique du chapitre.

Réponse. $P_C(F) \approx 0,529$.

Correction de l'exercice 4 - Test de dépistage

Notons M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

Arbre pondéré :

Malade (M) ou non, puis test positif (T)

a) Probabilités totales :

— $P(M) = 0,02$, $P_M(T) = 0,95$, $P_{\bar{M}}(T) = 0,04$.

$$P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582$$

b) $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,0582} \approx 0,326$.

- Seulement 32,6 % des personnes testées positives sont malades, alors que le test « fonctionne » à 95 % !
- Explication : les personnes saines sont tellement plus nombreuses que leurs 4 % de faux positifs dépassent en nombre les vrais positifs. C'est un résultat contre-intuitif mais fondamental.

Réponse. a) $P(T) = 0,0582$ · b) $P_T(M) \approx 0,326$.

Correction de l'exercice 5 - Reconnaître une loi binomiale

Conditions du cours : épreuves identiques, indépendantes, à deux issues, et on compte les succès.

a) **Oui** : la population est grande, les réponses sont indépendantes. $X \sim B(50; 0,3)$.

b) **Non** : sans remise, la composition du jeu change, les tirages ne sont pas indépendants et p n'est pas constant.

c) **Non** : Z n'est pas un nombre de succès mais une mesure continue. C'est plutôt une loi **normale** qui convient.

Réponse. a) oui, $B(50; 0,3)$ · b) non (sans remise) · c) non (grandeur continue, loi normale).

Correction de l'exercice 6 - Calculs avec la loi binomiale

a) Formule du cours : $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,2^2 \times 0,8^8$.

— $\binom{10}{2} = 45$, $0,2^2 = 0,04$, $0,8^8 \approx 0,167772$.

— Produit : $45 \times 0,04 \times 0,167772 \approx 0,302$.

b) On passe par l'événement contraire :

— $P(X = 0) = 0,8^{10} \approx 0,107374$.

— $P(X \geq 1) = 1 - 0,107374 \approx 0,893$.

c) $E(X) = np = 10 \times 0,2 = 2$ et $\sigma(X) = \sqrt{10 \times 0,2 \times 0,8} = \sqrt{1,6} \approx 1,26$.

- Interprétation : en moyenne 2 succès sur 10 épreuves, avec une dispersion d'environ 1,26.

Réponse. a) $\approx 0,302$ · b) $\approx 0,893$ · c) $E(X) = 2$, $\sigma(X) \approx 1,26$.

Correction de l'exercice 7 - Contrôle de qualité (binomiale)

a) Les 30 prélèvements sont identiques et indépendants (production en série), chacun avec deux issues et une probabilité de défaut constante $p = 0,05$. Donc $X \sim B(30; 0,05)$.

b) $P(X = 0) = 0,95^{30} \approx 0,214$.

- Autrement dit, dans près de 79 % des prélèvements, on trouve au moins un article défectueux.

c) $E(X) = np = 30 \times 0,05 = 1,5$ article défectueux en moyenne.

Réponse. a) $B(30; 0,05)$ · b) $\approx 0,214$ · c) $E(X) = 1,5$.

Correction de l'exercice 8 - Loi normale : intervalles de référence

On reconnaît les intervalles de référence du cours, centrés sur $\mu = 500$.

a) $496 = \mu - \sigma$ et $504 = \mu + \sigma$: c'est l'intervalle « un écart type », donc $P \approx 0,68$.

b) $492 = \mu - 2\sigma$ et $508 = \mu + 2\sigma$: intervalle « deux écarts types », donc $P \approx 0,95$.

c) La courbe de la loi normale est **symétrique** autour de μ , donc $P(X > 500) = 0,5$.

Réponse. a) $\approx 0,68$ · b) $\approx 0,95$ · c) 0,5.

Correction de l'exercice 9 - Loi normale : calculs à la calculatrice

a) C'est directement la valeur donnée : $P(X \leq 495) \approx 0,1057$, soit environ 10,6 %.

b) On soustrait les deux probabilités cumulées :

$$P(495 \leq X \leq 506) = P(X \leq 506) - P(X \leq 495) \approx 0,9332 - 0,1057 = 0,8275$$

— c) Événement contraire : $P(X > 506) = 1 - 0,9332 = 0,0668$, soit environ 6,7 %.

— Contrôle : $0,1057 + 0,8275 + 0,0668 = 1$. Les trois cas couvrent bien toutes les possibilités.

Réponse. a) $\approx 0,1057$ · b) $\approx 0,8275$ · c) $\approx 0,0668$.

Correction de l'exercice 10 - Choisir la bonne loi

— a) On **compte** des succès sur un nombre fixé d'épreuves indépendantes : loi **binomiale** $B(200; 0,15)$.

— b) Une durée est une grandeur **continue** : loi **normale** $N(1\,200; 80^2)$.

— c) Encore un comptage : loi **binomiale** $B(40; 0,92)$.

— Critère à retenir : « je compte » $\Rightarrow$ binomiale ; « je mesure » $\Rightarrow$ normale.

Réponse. a) $B(200; 0,15)$ · b) $N(1\,200; 80^2)$ · c) $B(40; 0,92)$.

Correction de l'exercice 11 - Problème : réglage d'une machine

a) $\mu - 2\sigma = 500 - 6 = 494$ et $\mu + 2\sigma = 506$: l'intervalle est $[494; 506]$, et il contient environ 95 % des bouteilles.

b) On veut $\mu - 3\sigma = 495$, soit $\mu - 9 = 495$, donc $\mu = 504$ mL.

c) Avec ce réglage, 495 mL est à trois écarts types en dessous de la moyenne.

— L'intervalle $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ contient environ 99,7 % des bouteilles ; il reste donc 0,3 % en dehors, répartis **symétriquement** de part et d'autre.

— La proportion de bouteilles sous 495 mL est donc d'environ $\frac{0,3}{2} = 0,15\%$, soit environ 1,5 bouteille sur 1 000.

Réponse. a) [494 ; 506], environ 95 % · b) $\mu = 504$ mL · c) environ 0,15 %.

Correction de l'exercice 12 - Lire un arbre de retours

a) On suit le chemin $I \rightarrow R$ et l'on multiplie :

$$P(I \cap R) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$$

b) **Probabilités totales** : deux chemins mènent à R .

$$P(R) = 0,6 \times 0,1 + 0,4 \times 0,05 = 0,06 + 0,02 = 0,08$$

c) On remonte l'arbre :

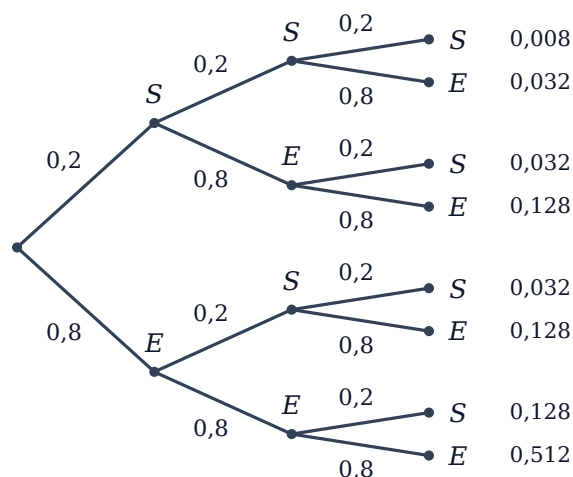
$$P_R(I) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{0,06}{0,08} = 0,75$$

Les achats sur internet représentent 60 % des achats mais 75 % des retours.

Réponse. a) 0,06 — b) 0,08 — c) 0,75.

Correction de l'exercice 13 - Un schéma de Bernoulli sur un arbre

a) À chaque visite, l'arbre se divise en S (0,2) et E (0,8) ; les visites étant indépendantes, les branches sont les mêmes à chaque niveau.



Trois épreuves indépendantes (S : succès)

b) On regroupe les chemins selon le nombre de succès :

- $X = 3$: un chemin, $0,2^3 = 0,008$;
- $X = 2$: trois chemins (SSE, SES, ESS), chacun $0,2^2 \times 0,8 = 0,032$, donc 0,096 ;
- $X = 1$: trois chemins, chacun $0,2 \times 0,8^2 = 0,128$, donc 0,384 ;
- $X = 0$: un chemin, $0,8^3 = 0,512$.

c) On reconnaît $P(X = k) = \binom{3}{k} \times 0,2^k \times 0,8^{3-k}$, où $\binom{3}{k}$ (1, 3, 3, 1) compte les chemins : X suit $B(3; 0,2)$, et

$$E(X) = np = 3 \times 0,2 = 0,6$$

Contrôle. $0,512 + 0,384 + 0,096 + 0,008 = 1$.

Réponse. b) 0,512 ; 0,384 ; 0,096 ; 0,008 — c) $E(X) = 0,6$.

Correction de l'exercice 14 - Des retards de livraison

a) Les 20 colis sont 20 épreuves identiques et indépendantes, le « succès » étant « le colis est en retard », de probabilité 0,1 : X suit $B(20; 0,1)$, et

$$E(X) = 20 \times 0,1 = 2$$

b) $P(X = 2) = \binom{20}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^{18} \approx 0,285$.

c) « Au moins 3 » est le contraire de « au plus 2 » :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,677 = 0,323$$

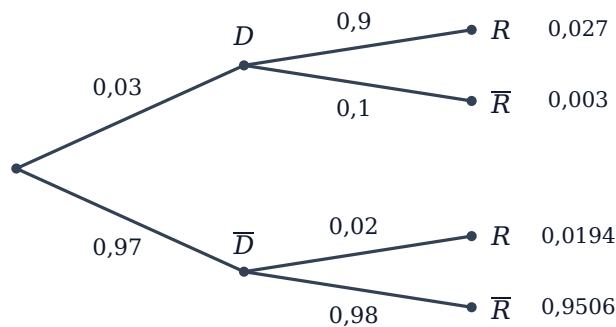
Environ une fois sur trois, au moins 3 colis sur 20 arrivent en retard.

Réponse. a) $B(20; 0,1)$, $E(X) = 2$ — b) $\approx 0,285$ — c) $\approx 0,323$.

Correction de l'exercice 15 - Un contrôle de qualité imparfait

On note D « la pièce est défectueuse » et R « la pièce est rejetée ».

a) Premier niveau : $P(D) = 0,03$; second niveau : $P_D(R) = 0,9$ et $P_{\bar{D}}(R) = 0,02$.



Pièce défectueuse (D) ou non, puis rejet (R)

b) **Probabilités totales :**

$$P(R) = 0,03 \times 0,9 + 0,97 \times 0,02 = 0,027 + 0,0194 = 0,0464$$

c) On remonte l'arbre :

$$P_R(D) = \frac{0,027}{0,0464} \approx 0,582$$

Seulement 58 % des pièces rejetées sont réellement défectueuses : les pièces correctes sont si nombreuses que 2 % d'entre elles font presque autant de rejets que les vraies pièces défectueuses.

Réponse. b) 0,0464 — c) $\approx 0,582$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : les deux lois dans un même problème

a) $2\,100 = 2\,000 + 2 \times 50 = \mu + 2\sigma$.

— L'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ contient environ 95 % des colis, donc 5 % sont en dehors, répartis symétriquement.

— La probabilité de dépasser $\mu + 2\sigma$ est donc d'environ $\frac{0,05}{2} = 0,025$.

b) Chaque colis est hors norme avec la probabilité 0,025, indépendamment des autres : Y suit la loi **binomiale** $B(20; 0,025)$.

c) $E(Y) = 20 \times 0,025 = 0,5$ colis hors norme en moyenne.

— $P(Y = 0) = 0,975^{20} \approx 0,603$.

— Interprétation : dans environ 60 % des expéditions de 20 colis, aucun n'est hors norme ; dans les 40 % restants, il y en a au moins un.

Réponse. a) $\approx 0,025$ · b) $B(20 ; 0,025)$ · c) $E(Y) = 0,5$ et $P(Y = 0) \approx 0,603$.