

Plaque 5 - Choisir la loi et décider

Probabilités : lois binomiale et normale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le choix de la loi.

Nature de la variable	Loi	Exemples
comptage de succès	binomiale	pièces défectueuses, ventes conclues
mesure continue	normale	masse, durée, longueur

Binomiale $B(n; p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad E(X) = np \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Normale $N(\mu; \sigma^2)$: repères 0,68, 0,95, 0,997 pour $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$.

Coût espéré. Si chaque incident coûte c :

$$E(\text{coût}) = c \times E(X) = c \times np$$

Décider. On compare une espérance de coût à un investissement, ou une probabilité à un seuil réglementaire.

Règle d'alerte. On fixe un seuil tel que la probabilité de le dépasser soit faible **si tout va bien** ; le dépasser devient alors un signal.

△ Une action « corrective » se juge sur l'**espérance**, pas sur un cas particulier.

△ Vérifier l'indépendance avant d'appliquer la binomiale.

Correction de l'exercice 1 - Choisir la bonne loi

On distingue un **comptage** de succès sur des épreuves répétées (loi binomiale) d'une **mesure continue** qui varie autour d'une moyenne (loi normale).

a) On compte les pièces défectueuses parmi 40 contrôlées, chacune défectueuse avec la probabilité 0,15, indépendamment : X suit $B(40; 0,15)$.

b) La masse est une grandeur continue qui varie autour de 250 g : on la modélise par $N(250; 4^2)$.

c) On compte les ventes sur 200 appels, chacun aboutissant avec la probabilité 0,04 : $B(200; 0,04)$.

Réponse. a) $B(40; 0,15)$ — b) $N(250; 4^2)$ — c) $B(200; 0,04)$.

Correction de l'exercice 2 - Un plan de contrôle

a) Le nombre X de pièces défectueuses parmi les 40 suit $B(40; 0,15)$. Le lot est accepté si $X \leq 3$; à la calculatrice :

$$P(X \leq 3) \approx 0,130$$

b) Un lot à 15 % de défauts n'est accepté que dans 13 % des cas : le plan protège bien le client contre un lot de cette qualité. En moyenne, on trouve $40 \times 0,15 = 6$ pièces défectueuses, ce qui dépasse nettement le seuil de 3.

Réponse. a) $\approx 0,130$ — b) un lot à 15 % de défauts est rarement accepté.

Correction de l'exercice 3 - Coût espéré d'une non-qualité

Le nombre de défauts par jour suit $B(2000; 0,04)$.

a) $E(X) = 2000 \times 0,04 = 80$ défauts par jour en moyenne.

b) Coût moyen quotidien : $80 \times 12 = 960$ €.

c) Avec un taux de 1,5 % : $2000 \times 0,015 = 30$ défauts, soit $30 \times 12 = 360$ € par jour. L'économie est de $960 - 360 = 600$ € par jour, donc le réglage est remboursé en

$$\frac{9000}{600} = 15 \text{ jours}$$

Il est rentable dès le 15^e jour de production.

Réponse. a) 80 — b) 960 € — c) au bout de 15 jours.

Correction de l'exercice 4 - Une garantie à tarifier

a) La réparation coûte 220 € avec la probabilité 0,04, et rien sinon :

$$\text{coût moyen} = 220 \times 0,04 = 8,80 \text{ €}$$

b) Pour une marge moyenne de 60 €, le prix de l'extension doit couvrir le coût moyen du risque et la marge : $8,80 + 60 = 68,80$ €.

Vérification. Le résultat moyen par extension vendue est alors $68,80 - 8,80 = 60$ €.

Réponse. a) 8,80 € — b) 68,80 €.

Correction de l'exercice 5 - Un seuil d'alerte

Le nombre X de pièces défectueuses parmi 200 suit $B(200; 0,02)$.

a) Calcul :

$$E(X) = 200 \times 0,02 = 4 \quad \sigma(X) = \sqrt{200 \times 0,02 \times 0,98} = \sqrt{3,92} \approx 1,98$$

b) Un nombre de défauts au-delà de $E(X) + 2\sigma(X) \approx 4 + 2 \times 1,98 \approx 8$ est rare si la machine fonctionne normalement. On peut fixer le seuil d'alerte à **plus de 8 pièces défectueuses** : au-delà, on soupçonne un dérèglement et l'on intervient.

Réponse. a) 4 et $\approx 1,98$ — b) alerte au-delà de 8 pièces défectueuses.

Correction de l'exercice 6 - Deux lois dans un même problème

a) Le volume suit $N(500; 4^2)$; l'intervalle $[492; 508]$ est $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$, qui contient environ 95 % des volumes. Une bouteille est refusée avec la probabilité

$$p \approx 1 - 0,95 = 0,05$$

(à la calculatrice : 0,0455).

b) Les 25 bouteilles contrôlées sont indépendantes, chacune refusée avec la probabilité $p \approx 0,05$: le nombre de refus suit $B(25; 0,05)$, d'espérance $25 \times 0,05 = 1,25$ refus par contrôle.

Réponse. a) $\approx 0,05$ — b) $B(25; 0,05)$, espérance 1,25.

Correction de l'exercice 7 - Un objectif commercial

Le nombre X de ventes suit $B(25; 0,12)$.

a) $E(X) = 25 \times 0,12 = 3$ ventes en moyenne.

b) Atteindre l'objectif, c'est $X \geq 5$, contraire de $X \leq 4$:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,8266 = 0,1734$$

L'objectif n'est atteint qu'environ une fois sur six.

c) Pour espérer 5 ventes, il faut $n \times 0,12 \geq 5$, soit $n \geq \frac{5}{0,12} \approx 41,7$: au moins 42

rendez-vous.

Réponse. a) 3 — b) $\approx 0,173$ — c) 42 rendez-vous.

Correction de l'exercice 8 - Une provision à constituer

Le nombre X de sinistres sur 5000 contrats suit $B(5000; 0,03)$.

a) $E(X) = 5000 \times 0,03 = 150$ sinistres en moyenne, soit un coût moyen de $150 \times 4000 = 600\,000$ €.

b) Provisionner seulement la moyenne laisserait l'assureur à découvert environ une année sur deux. On ajoute une marge de deux écarts types :

$$\sigma(X) = \sqrt{5000 \times 0,03 \times 0,97} \approx 12,1 \quad 150 + 2 \times 12,1 \approx 174 \text{ sinistres}$$

Une provision prudente est donc d'environ $174 \times 4000 = 696\,000$ €.

Réponse. a) 150 sinistres, 600 000 € — b) environ 696 000 €.

Correction de l'exercice 9 - Comparer deux plans de contrôle

a) Le nombre de défauts suit $B(20; 0,05)$ dans le plan A et $B(50; 0,05)$ dans le plan B. À la calculatrice :

- plan A (accepté si au plus 1 défaut) : $P(X \leq 1) \approx 0,736$;
- plan B (accepté si au plus 3 défauts) : $P(X \leq 3) \approx 0,760$.

b) Le plan le plus **sévère** est celui qui accepte le moins souvent ce lot à 5 % de défauts : le **plan A** (73,6 % d'acceptation contre 76,0 %). L'écart est faible ; le plan B, qui contrôle plus de pièces, est en revanche plus fiable pour distinguer un bon lot d'un mauvais.

Réponse. a) A : $\approx 0,736$; B : $\approx 0,760$ — b) le plan A, de peu.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

L'erreur. Une loi binomiale modélise le **nombre de succès** sur un nombre fixé d'épreuves ; ses valeurs sont des entiers de 0 à n . La durée de vie d'une ampoule est une **mesure continue** (en heures), pas un comptage de succès.

Le bon modèle. On utilise une loi continue, par exemple une loi normale $N(\mu; \sigma^2)$ dont on estime la moyenne et l'écart type à partir des données.

Quand la binomiale conviendrait. Si l'on contrôle 1000 ampoules et que chacune est défectueuse avec la probabilité 0,02, le **nombre** d'ampoules défectueuses suit $B(1000; 0,02)$.

Réponse. La durée de vie est continue : loi normale, pas binomiale.

Correction de l'exercice 11 - Une action corrective

La tolérance [488; 512] est à ± 12 de la moyenne 500.

- **Situation actuelle** ($\sigma = 6$) : $\pm 12 = \pm 2\sigma$, donc environ 4,55 % de rebut (calculatrice). Sur 200 000 pièces : $200\,000 \times 0,0455 \approx 9100$ pièces, soit $9100 \times 1,5 \approx 13\,650$ € par an.

— **Avec** $\sigma = 4$: $\pm 12 = \pm 3\sigma$, environ 0,27 % de rebut, soit 540 pièces et environ 810 € par an.

Économie annuelle : environ $13\,650 - 810 = 12\,840$ €, soit 25 680 € sur deux ans.

$$25\,680 > 25\,000$$

L'investissement est (de justesse) **rentable en deux ans**.

Réponse. Oui, de justesse : environ 25 680 € économisés pour 25 000 € investis.

Correction de l'exercice 12 - Un test de conformité

a) Sous l'hypothèse du fournisseur, le nombre X de pièces défectueuses sur 200 suit $B(200; 0,03)$:

$$E(X) = 200 \times 0,03 = 6 \quad \sigma(X) = \sqrt{200 \times 0,03 \times 0,97} = \sqrt{5,82} \approx 2,41$$

b) On a trouvé 13 pièces défectueuses, soit un écart de $\frac{13-6}{2,41} \approx 2,9$ écarts types au-dessus de la moyenne. Une valeur au-delà de $E(X) + 2\sigma(X) \approx 10,8$ est rare si l'annonce est exacte.

L'écart est **anormal** : il met sérieusement en doute le taux de 3 % annoncé par le fournisseur.

Réponse. a) 6 et $\approx 2,41$ — b) oui : 13 dépasse nettement $E(X) + 2\sigma(X) \approx 10,8$.

Correction de l'exercice 13 - Une promotion à évaluer

a) Chacune des 800 ventes est remboursée de 150 € si l'équipe gagne (probabilité 0,18). Le coût moyen de l'opération est

$$800 \times 150 \times 0,18 = 21\,600 \text{ €}$$

b) La marge totale est $800 \times 90 = 72\,000$ €. En moyenne, il reste $72\,000 - 21\,600 = 50\,400$ € : la marge reste **positive en moyenne**.

Mais. Si l'équipe gagne, le remboursement coûte $800 \times 150 = 120\,000$ € et la marge devient $72\,000 - 120\,000 = -48\,000$ € : l'opération fait alors perdre de l'argent, une fois sur cinq environ.

Réponse. a) 21 600 € — b) oui en moyenne (50 400 €), mais perte de 48 000 € si l'équipe gagne.

Correction de l'exercice 14 - Deux fournisseurs à départager

Le coût moyen d'une pièce est son prix plus le coût moyen de traitement des défauts :

$$\text{coût moyen} = \text{prix} + 35 \times P(\text{défaut})$$

— A : $14 + 35 \times 0,02 = 14 + 0,70 = 14,70$ € ;

— B : $12,80 + 35 \times 0,06 = 12,80 + 2,10 = 14,90$ €.

Le fournisseur **A** est le moins cher en réalité : les défauts de B coûtent plus que l'écart de prix.

Réponse. A (14,70 € contre 14,90 €).

Correction de l'exercice 15 - Dimensionner un contrôle

Avec n pièces prélevées indépendamment, la probabilité de ne trouver **aucun** défaut vaut $(1 - p)^n$. On veut

$$1 - (1 - p)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow (1 - p)^n \leq 0,05$$

a) Avec $p = 0,08$: $0,92^{35} \approx 0,054$ et $0,92^{36} \approx 0,0497$. Il faut prélever 36 **pièces**.

b) Avec $p = 0,03$: $0,97^{98} \approx 0,0505$ et $0,97^{99} \approx 0,0490$. Il faut 99 **pièces**.

Lecture. Plus le défaut est rare, plus il faut contrôler de pièces pour avoir de bonnes chances de le détecter.

Réponse. a) 36 pièces — b) 99 pièces.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une chaîne complète

a) La masse suit $N(500; 5^2)$; l'intervalle $[490; 510]$ est $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$. Un sachet est refusé avec la probabilité $p \approx 0,0455$ (calculatrice ; environ 0,05 avec les valeurs de référence).

b) Les 30 sachets d'un contrôle sont indépendants : le nombre de refus suit $B(30; 0,0455)$, d'espérance $30 \times 0,0455 \approx 1,37$ refus par contrôle.

c) Sur 12 000 sachets par jour : $12\,000 \times 0,0455 \approx 546$ refus, qui coûtent $546 \times 0,80 \approx 437$ € par jour.

Réponse. a) $\approx 0,0455$ — b) $B(30; 0,0455)$, $\approx 1,37$ — c) environ 437 € par jour.