

Plaquette 2 - Conditionnelles et arbres pondérés

Probabilités : lois binomiale et normale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Probabilité conditionnelle.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

L'arbre pondéré.

Règle	Opération
suivre un chemin	multiplier
réunir des chemins	additionner
branches d'un même nœud	leur somme vaut 1

Formule des probabilités totales.

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Remonter l'arbre. Pour obtenir $P_B(A)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

C'est le chemin concerné, divisé par la **somme** de tous les chemins réalisant B .

Indépendance.

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Autrement dit $P_A(B) = P(B)$: savoir que A s'est produit ne change rien.

△ $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont deux nombres **différents** : ils n'ont pas le même dénominateur.

△ Incompatibles et indépendants ne veulent pas dire la même chose.

Correction de l'exercice 1 - Lire un tableau croisé

Les probabilités simples et les intersections se calculent sur le total (1000) ; une probabilité conditionnelle sur le total de la ligne de la condition.

$$a) P(A) = \frac{400}{1000} = 0,4 ; P(S) = \frac{594}{1000} = 0,594 ; P(A \cap S) = \frac{324}{1000} = 0,324.$$

b) Parmi les 400 abonnés, 324 sont satisfaits :

$$P_A(S) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{324}{400} = 0,81$$

81 % des abonnés sont satisfaits, contre 59,4 % de l'ensemble des clients.

Réponse. a) 0,4 ; 0,594 ; 0,324 — b) $P_A(S) = 0,81$.

Correction de l'exercice 2 - Deux conditionnelles à ne pas confondre

On restreint l'univers aux 594 clients satisfaits :

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{324}{594} \approx 0,545$$

Comparaison. $P_A(S) = 0,81$ alors que $P_S(A) \approx 0,545$:

- $P_A(S)$: parmi les **abonnés**, 81 % sont satisfaits ;
- $P_S(A)$: parmi les **satisfaits**, environ 54,5 % sont abonnés.

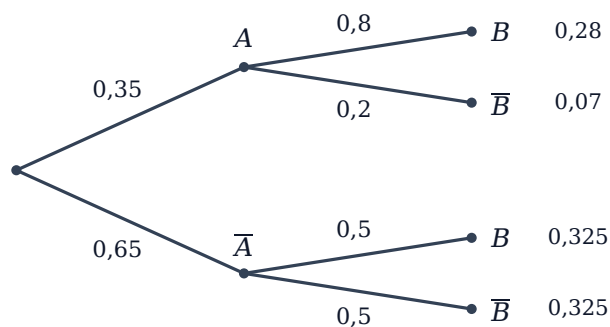
Le numérateur (324) est le même, mais pas la population de référence (400 abonnés ou 594 satisfaits).

Réponse. $P_S(A) \approx 0,545$, différent de $P_A(S) = 0,81$.

Correction de l'exercice 3 - Compléter un arbre

a) À chaque nœud, les branches ont pour somme 1 :

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,35 = 0,65 \quad P_A(\bar{B}) = 1 - 0,8 = 0,2 \quad P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,5 = 0,5$$



L'arbre complété

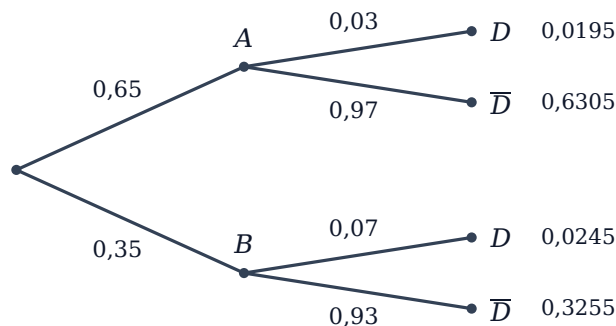
b) **Probabilités totales** : deux chemins mènent à B .

$$P(B) = 0,35 \times 0,8 + 0,65 \times 0,5 = 0,28 + 0,325 = 0,605$$

Réponse. a) 0,65 ; 0,2 ; 0,5 — b) $P(B) = 0,605$.

Correction de l'exercice 4 - Deux sites de production

On note A, B les sites et D « la pièce est défectueuse ».



Site de production puis défaut

a) **Probabilités totales** :

$$P(D) = 0,65 \times 0,03 + 0,35 \times 0,07 = 0,0195 + 0,0245 = 0,044$$

b) On remonte l'arbre :

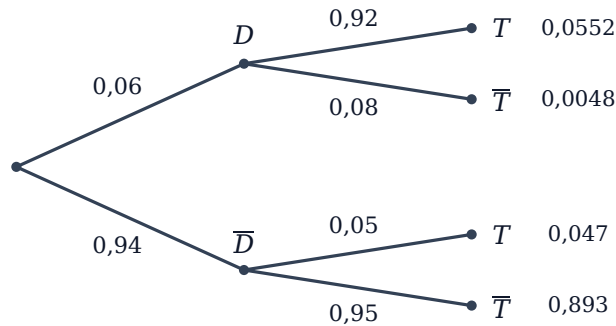
$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,0245}{0,044} \approx 0,557$$

Le site B fait 35 % de la production, mais environ 56 % des pièces défectueuses.

Réponse. a) 0,044 — b) $\approx 0,557$.

Correction de l'exercice 5 - Un test de dépistage

On note D « la pièce est défectueuse » et T « le test est positif ».



Pièce défectueuse ou non, puis test positif

a) Probabilités totales :

$$P(T) = 0,06 \times 0,92 + 0,94 \times 0,05 = 0,0552 + 0,047 = 0,1022$$

b) On remonte l'arbre :

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0552}{0,1022} \approx 0,540$$

Seulement 54 % des pièces testées positives sont vraiment défectueuses : les faux positifs (0,047) sont presque aussi nombreux que les vrais (0,0552), car les pièces correctes sont très majoritaires.

Réponse. a) 0,1022 — b) $\approx 0,540$.

Correction de l'exercice 6 - Tester l'indépendance

A et S sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap S) = P(A) \times P(S)$$

$$— P(A) \times P(S) = 0,4 \times 0,594 = 0,2376 ;$$

$$— P(A \cap S) = 0,324.$$

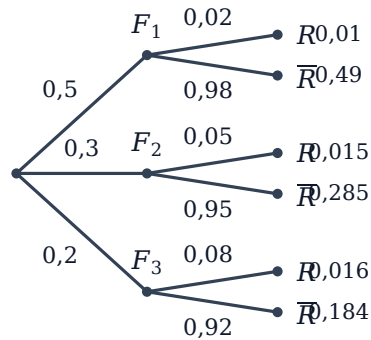
$0,324 \neq 0,2376$: les événements **ne sont pas indépendants**.

Lecture. $P_A(S) = 0,81 > P(S) = 0,594$: être abonné est associé à une satisfaction plus fréquente.

Réponse. Non : $0,324 \neq 0,2376$.

Correction de l'exercice 7 – Trois fournisseurs

On note R « l'article est retourné ».



Fournisseur puis retour (R)

a) **Probabilités totales** sur les trois chemins menant à R :

$$P(R) = 0,5 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 + 0,2 \times 0,08 = 0,01 + 0,015 + 0,016 = 0,041$$

b) On compare les chemins (ils ont tous le même dénominateur $P(R)$ quand on remonte l'arbre) : F_3 pèse le plus (0,016), soit

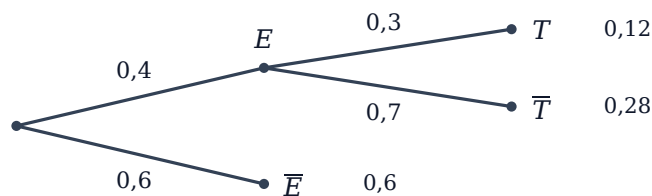
$$P_R(F_3) = \frac{0,016}{0,041} \approx 0,39$$

F_3 ne fournit que 20 % des articles mais près de 40 % des retours.

Réponse. a) 0,041 — b) F_3 , avec environ 39 % des retours.

Correction de l'exercice 8 – Un parcours de recrutement

On note E « le candidat passe l'entretien » et T « il réussit le test ». Seuls ceux qui ont passé l'entretien peuvent être retenus.



E : entretien passé, T : test réussi

a) Être retenu, c'est suivre le chemin $E \rightarrow T$:

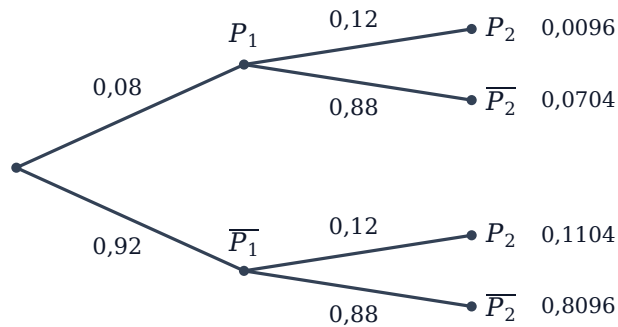
$$P(E \cap T) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

b) Sur 500 candidats : $500 \times 0,12 = 60$ recrutements.

Réponse. a) 0,12 — b) 60.

Correction de l'exercice 9 – Deux événements indépendants

On note P_1, P_2 « la machine i tombe en panne ». Les machines étant **indépendantes**, on multiplie les probabilités le long des chemins.



P_i : la machine i tombe en panne

a) $P(P_1 \cap P_2) = 0,08 \times 0,12 = 0,0096$.

b) « Au moins une panne » est le contraire de « aucune panne » :

$$P = 1 - 0,92 \times 0,88 = 1 - 0,8096 = 0,1904$$

c) Exactement une panne : deux chemins.

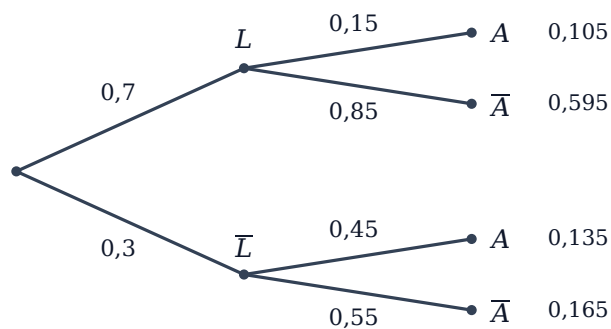
$$P = 0,08 \times 0,88 + 0,92 \times 0,12 = 0,0704 + 0,1104 = 0,1808$$

Contrôle. $0,1808 + 0,0096 = 0,1904$: on retrouve b).

Réponse. a) 0,0096 — b) 0,1904 — c) 0,1808.

Correction de l'exercice 10 – Remonter un arbre

On note L « le client vient du canal en ligne » et A « il achète ».



Canal (L : en ligne) puis achat (A)

a) **Probabilités totales :**

$$P(A) = 0,7 \times 0,15 + 0,3 \times 0,45 = 0,105 + 0,135 = 0,24$$

b) On remonte l'arbre :

$$P_A(\bar{L}) = \frac{0,135}{0,24} = 0,5625$$

Les clients venus en magasin ne sont que 30 % des clients, mais ils font plus de la moitié des achats.

Réponse. a) 0,24 — b) 0,5625.

Correction de l'exercice 11 – Repérer une erreur

On note A « être abonné » et S « être satisfait ».

Ce qui est donné. « 80 % des abonnés sont satisfaits » : $P_A(S) = 0,8$ (population de référence : les abonnés).

Ce qu'affirme l'élève. « 80 % des satisfaits sont abonnés » : $P_S(A) = 0,8$ (population de référence : les satisfaits).

Pourquoi c'est faux. Les deux probabilités ont le même numérateur $P(A \cap S)$ mais des dénominateurs différents :

$$P_A(S) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} \quad P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)}$$

Avec le tableau du premier exercice, $P_A(S) = 0,81$ mais $P_S(A) \approx 0,545$.

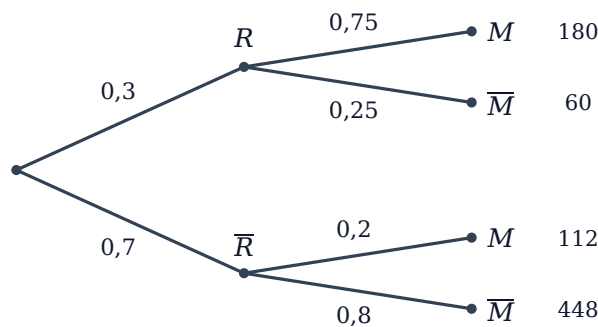
Réponse. Faux : $P_A(S)$ et $P_S(A)$ diffèrent en général.

Correction de l'exercice 12 – Compléter un tableau

On calcule les effectifs en suivant l'arbre (effectifs au bout des chemins, sur 800 clients).

— Professionnels : $800 \times 0,3 = 240$, dont $240 \times 0,75 = 180$ avec contrat et 60 sans.

— Particuliers : $800 - 240 = 560$, dont $560 \times 0,2 = 112$ avec contrat et 448 sans.



R : professionnel ; M : contrat de maintenance

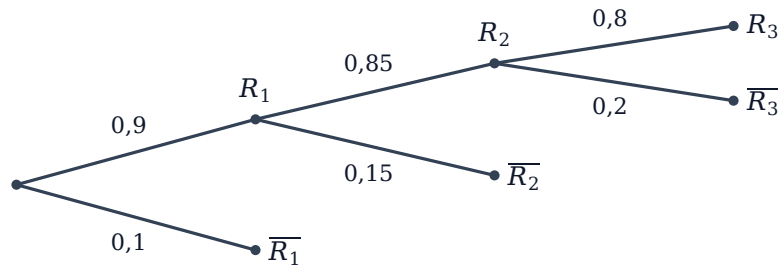
	Contrat	Sans contrat	Total
Professionnels	180	60	240
Particuliers	112	448	560
Total	292	508	800

Contrôle. $180 + 60 + 112 + 448 = 800$.

Réponse. Professionnels 180 / 60 ; particuliers 112 / 448 ; total contrats 292.

Correction de l'exercice 13 - Des chemins à compter

On note R_i « l'étape i est réussie ». Les étapes étant **indépendantes**, on multiplie le long d'un chemin.



R_i : étape i réussie

a) Tout réussir : $0,9 \times 0,85 \times 0,8 = 0,612$.

b) « Échouer au moins une fois » est le contraire de « tout réussir » : $1 - 0,612 = 0,388$.

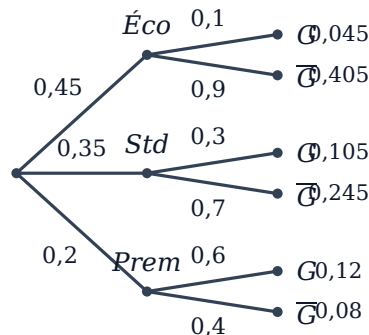
c) Échouer exactement à la dernière : réussir les deux premières, puis échouer la troisième.

$$P = 0,9 \times 0,85 \times (1 - 0,8) = 0,765 \times 0,2 = 0,153$$

Réponse. a) 0,612 — b) 0,388 — c) 0,153.

Correction de l'exercice 14 - Un arbre à trois branches

On note G « le client souscrit l'extension ».



Formule puis extension de garantie (G)

a) **Probabilités totales :**

$$P(G) = 0,45 \times 0,1 + 0,35 \times 0,3 + 0,2 \times 0,6 = 0,045 + 0,105 + 0,12 = 0,27$$

b) On remonte l'arbre :

$$P_G(\text{Premium}) = \frac{0,12}{0,27} = \frac{4}{9} \approx 0,444$$

Les clients Premium sont 20 % des clients mais près de 44 % des souscripteurs.

Réponse. a) 0,27 — b) $\approx 0,444$.

Correction de l'exercice 15 - Indépendance à vérifier

On note F « être une femme » et C « être cadre ». On teste l'égalité

$$P(F \cap C) = P(F) \times P(C)$$

$$- P(F) = \frac{400}{1000} = 0,4 ; P(C) = \frac{160 + 240}{1000} = 0,4 ; \text{ donc } P(F) \times P(C) = 0,16.$$

$$- P(F \cap C) = \frac{160}{1000} = 0,16.$$

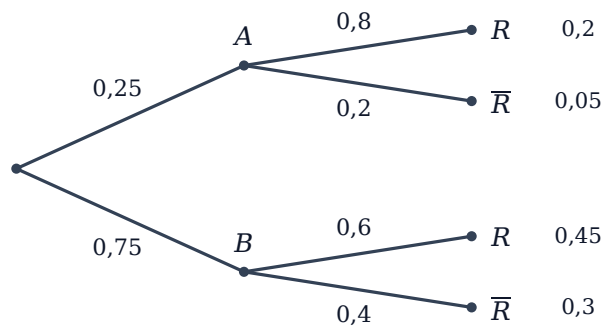
L'égalité est vérifiée : le sexe et le statut de cadre sont **indépendants** dans cette population.

Lecture par les taux. $\frac{160}{400} = 40\%$ des femmes et $\frac{240}{600} = 40\%$ des hommes sont cadres.

Réponse. Oui : $P(F \cap C) = 0,16 = 0,4 \times 0,4$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un service après-vente

On note A, B le produit concerné et R « l'appel est résolu du premier coup ».



Produit concerné puis résolution au premier appel (R)

a) **Probabilités totales :**

$$P(R) = 0,25 \times 0,8 + 0,75 \times 0,6 = 0,2 + 0,45 = 0,65$$

b) Un appel non résolu suit l'un des chemins menant à $\bar{R}$:

$$P(\bar{R}) = 0,25 \times 0,2 + 0,75 \times 0,4 = 0,05 + 0,3 = 0,35.$$

$$P_{\bar{R}}(B) = \frac{0,3}{0,35} = \frac{6}{7} \approx 0,857$$

c) Chaque appel non résolu entraîne un second appel : $4000 \times 0,35 = 1400$ seconds appels.

Réponse. a) 0,65 — b) $\frac{6}{7} \approx 0,857$ — c) 1400.