

Plaquette 3 – Loi binomiale : reconnaître et calculer

Probabilités : lois binomiale et normale – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois conditions.

Condition	Ce qu'il faut vérifier
répétition	n épreuves identiques
indépendance	le résultat d'une épreuve n'influe pas sur les autres
comptage	X compte le nombre de succès

On note alors X suit $B(n; p)$.

La formule.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ compte les **chemins** de l'arbre menant à k succès.

Espérance et écart type.

$$E(X) = np \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Les formulations à traduire.

Énoncé	Traduction
« exactement k »	$P(X = k)$
« au plus k »	$P(X \leq k)$
« au moins k »	$1 - P(X \leq k - 1)$
« au moins un »	$1 - P(X = 0)$
« aucun »	$P(X = 0)$

À la calculatrice. Une touche donne $P(X = k)$, une autre $P(X \leq k)$. Tout le reste s'en déduit.

⚠ Un tirage **sans remise** rompt l'indépendance : la loi n'est plus binomiale (sauf si la population est très grande).

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une loi binomiale

X suit une loi binomiale $B(n; p)$ quand on répète n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve à deux issues, et que X compte les succès (de probabilité p).

a) Les 10 lancers sont identiques et indépendants ; chaque lancer donne 6 (succès) avec la probabilité $\frac{1}{6}$. Donc X suit $B\left(10; \frac{1}{6}\right)$.

b) Les tirages se font **sans remise** dans une petite urne : la composition change après chaque tirage, les épreuves ne sont pas indépendantes. X **ne suit pas** une loi binomiale.

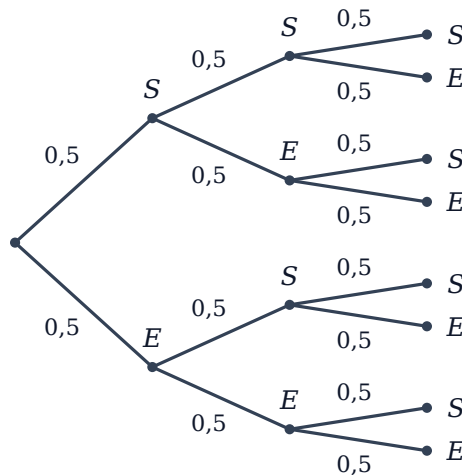
c) On interroge 200 clients au hasard dans une grande clientèle : chaque client est satisfait avec la probabilité 0,6, et l'on assimile les choix à des tirages indépendants

(population très grande devant 200). X suit $B(200; 0,6)$.

Réponse. a) $B(10; \frac{1}{6})$ — b) non (sans remise) — c) $B(200; 0,6)$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer un coefficient binomial

Le coefficient $\binom{n}{k}$ est le **nombre de chemins** de l'arbre d'un schéma de n épreuves qui comportent exactement k succès. Par exemple, avec 3 épreuves, $\binom{3}{2} = 3$ chemins ont deux succès :



Trois épreuves : 3 chemins comportent exactement 2 succès (SSE, SES, ESS)

On obtient les valeurs à la calculatrice (ou avec le triangle de Pascal) ; on peut les contrôler par le calcul.

a) $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$: il y a 120 façons de placer 3 succès parmi 10 épreuves.

b) $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$: 10 façons de placer 2 succès parmi 5 épreuves.

c) $\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1680}{24} = 70$.

Contrôle par symétrie. Placer 3 succès revient à placer 7 échecs : $\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = 120$.

Réponse. a) 120 — b) 10 — c) 70.

Correction de l'exercice 3 - Appliquer la formule

Pour X suivant $B(10; 0,3)$, on applique

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,3^k \times 0,7^{10-k}$$

a) Pour $k = 3$: $\binom{10}{3} = 120$ chemins, chacun de probabilité $0,3^3 \times 0,7^7$.

$$P(X = 3) = 120 \times 0,027 \times 0,7^7 \approx 120 \times 0,027 \times 0,08235 \approx 0,2668$$

b) Pour $k = 0$: un seul chemin (que des échecs), $\binom{10}{0} = 1$ et $0,3^0 = 1$.

$$P(X = 0) = 0,7^{10} \approx 0,0282$$

Lecture. Il y a moins de 3 % de chances de n'obtenir aucun succès en 10 épreuves. Le nombre de succès le plus probable est 3, égal à l'espérance $10 \times 0,3$.

Réponse. a) $\approx 0,2668$ — b) $\approx 0,0282$.

Correction de l'exercice 4 - Traduire les formulations

On ramène chaque probabilité aux valeurs données, $P(X \leq 2)$ et $P(X \leq 3)$.

a) « Au moins 3 » est le contraire de « au plus 2 » :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,3828 = 0,6172$$

b) « Au moins 4 » est le contraire de « au plus 3 » :

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,6496 = 0,3504.$$

c) « Exactement 3 » : $P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) \approx 0,6496 - 0,3828 = 0,2668$.

Contrôle. On retrouve la valeur de $P(X = 3)$ obtenue par la formule.

Réponse. a) 0,6172 — b) 0,3504 — c) 0,2668.

Correction de l'exercice 5 - Une loi complète

Pour X suivant $B(6; 0,4)$: $P(X = k) = \binom{6}{k} \times 0,4^k \times 0,6^{6-k}$, avec les coefficients 1 ; 6 ; 15 ; 20 ; 15 ; 6 ; 1 (triangle de Pascal).

a) À 10^{-4} près :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	0,0467	0,1866	0,3110	0,2765	0,1382	0,0369	0,0041

Par exemple $P(X = 2) = 15 \times 0,4^2 \times 0,6^4 = 15 \times 0,16 \times 0,1296 \approx 0,3110$.

Contrôle. La somme vaut 1 (aux arrondis près).

b) Pour une loi binomiale :

$$E(X) = np = 6 \times 0,4 = 2,4 \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1,44} = 1,2$$

Réponse. a) voir le tableau — b) $E(X) = 2,4$ et $\sigma(X) = 1,2$.

Correction de l'exercice 6 - Un contrôle de qualité

a) Chaque pièce prélevée est défectueuse (succès) avec la probabilité 0,02. Le prélèvement de 50 pièces dans une grande production est assimilé à 50 tirages **identiques et indépendants** ; X compte les pièces défectueuses. Donc X suit $B(50; 0,02)$.

b) Aucune pièce défectueuse :

$$P(X = 0) = 0,98^{50} \approx 0,3642$$

Au moins une : $P(X \geq 1) = 1 - 0,3642 = 0,6358$.

c) $E(X) = 50 \times 0,02 = 1$: en moyenne, une pièce défectueuse par prélèvement.

Réponse. a) $B(50; 0,02)$ — b) $\approx 0,364$ et $\approx 0,636$ — c) $E(X) = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Au moins un succès

Le nombre X de ventes sur 100 appels suit $B(100; 0,03)$ (appels indépendants, même probabilité de succès).

- a) Aucune vente : $P(X = 0) = 0,97^{100} \approx 0,0476$.
 b) Au moins une : $P(X \geq 1) = 1 - 0,0476 = 0,9524$.
 c) $E(X) = 100 \times 0,03 = 3$ ventes par jour en moyenne.

Lecture. Même avec un faible taux de conclusion, 100 appels donnent plus de 95 % de chances de vendre au moins une fois.

Réponse. a) $\approx 0,048$ — b) $\approx 0,952$ — c) 3.

Correction de l'exercice 8 - Espérance et écart type

Pour une loi binomiale $B(n; p)$:

$$E(X) = np \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

- a) $B(30; 0,1)$: $E(X) = 3$ et $\sigma(X) = \sqrt{30 \times 0,1 \times 0,9} = \sqrt{2,7} \approx 1,64$.
 b) $B(15; 0,6)$: $E(X) = 9$ et $\sigma(X) = \sqrt{15 \times 0,6 \times 0,4} = \sqrt{3,6} \approx 1,90$.
 c) $B(200; 0,5)$: $E(X) = 100$ et $\sigma(X) = \sqrt{200 \times 0,5 \times 0,5} = \sqrt{50} \approx 7,07$.

Lecture. L'écart type croît moins vite que l'espérance : en c), on attend 100 succès, avec des écarts typiques d'environ 7.

Réponse. a) 3 et $\approx 1,64$ — b) 9 et $\approx 1,90$ — c) 100 et $\approx 7,07$.

Correction de l'exercice 9 - Un QCM au hasard

a) Chaque question est réussie par hasard avec la probabilité $\frac{1}{4}$, indépendamment des autres. Le nombre X de bonnes réponses sur 4 questions suit $B\left(4; \frac{1}{4}\right)$.

b) « Au moins 3 » : $X = 3$ ou $X = 4$.

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} = 4 \times \frac{1}{64} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{256}$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

$$P(X \geq 3) = \frac{13}{256} \approx 0,051$$

Répondre au hasard ne donne qu'environ 5 % de chances d'avoir au moins 3 bonnes réponses sur 4.

Réponse. a) $B(4; \frac{1}{4})$ — b) $\frac{13}{256} \approx 0,051$.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

L'erreur. « $X \geq 2$ » regroupe les valeurs 2, 3, ..., 20. Son contraire est « $X \leq 1$ » (valeurs 0 et 1), et non « $X \leq 2$ ».

La bonne écriture.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

En écrivant $1 - P(X \leq 2)$, l'élève retire aussi le cas $X = 2$, qui fait pourtant partie de l'événement : il calcule en réalité $P(X \geq 3)$.

Valeur. Avec $B(20; 0,1)$: $P(X \leq 1) = 0,9^{20} + 20 \times 0,1 \times 0,9^{19} \approx 0,1216 + 0,2702 = 0,3917$, donc $P(X \geq 2) \approx 0,608$.

Réponse. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,608$.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux échantillons

Dans chaque prélèvement, le nombre de pièces avec défaut suit une loi binomiale de paramètre $p = 0,1$, et « aucun défaut » a pour probabilité $0,9^n$.

a) Avec 10 pièces : $0,9^{10} \approx 0,349$. Avec 30 pièces : $0,9^{30} \approx 0,042$.

b) Un prélèvement de 10 pièces ne trouve aucun défaut dans un cas sur trois, alors que le défaut touche 10 % des pièces : il laisse souvent passer le problème. Avec 30 pièces, ce risque tombe à environ 4 % : un échantillon plus grand détecte bien plus sûrement le défaut.

Réponse. a) $\approx 0,349$ et $\approx 0,042$ — b) l'échantillon de 30 détecte bien mieux le défaut.

Correction de l'exercice 12 - Une garantie

a) Chaque appareil vendu tombe en panne pendant la garantie avec la probabilité 0,06, indépendamment des autres : le nombre X de pannes sur 30 appareils suit $B(30; 0,06)$.

b) $E(X) = 30 \times 0,06 = 1,8$ panne en moyenne.

c) Chaque panne coûte 180 € : le coût moyen est

$$1,8 \times 180 = 324 \text{ €}$$

pour l'ensemble des 30 appareils, soit 10,80 € par appareil vendu.

Réponse. a) $B(30; 0,06)$ — b) 1,8 — c) 324 €.

Correction de l'exercice 13 - Fixer une taille d'échantillon

Avec n pièces prélevées, le nombre de défauts suit $B(n; 0,05)$, et la probabilité de ne détecter **aucun** défaut vaut $0,95^n$. On veut

$$1 - 0,95^n \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,95^n \leq 0,1$$

La suite $0,95^n$ est décroissante ; à la calculatrice :

$$0,95^{44} \approx 0,1047 \quad 0,95^{45} \approx 0,0994$$

Il faut prélever au moins 45 **pièces**.

Réponse. 45 pièces.

Correction de l'exercice 14 - Lire un tableau de loi

a) On additionne les probabilités des valeurs concernées :

$$P(X \leq 2) = 0,2373 + 0,3955 + 0,2637 = 0,8965$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (0,2373 + 0,3955) = 0,3672$$

b) X prend les valeurs 0 à 5 (le tableau et $P(X = 5)$), donc $n = 5$. Ensuite

$P(X = 0) = (1 - p)^5 = 0,2373$; on essaie $p = 0,25$: $0,75^5 \approx 0,2373$ ✓, et

$P(X = 5) = 0,25^5 \approx 0,0010$ ✓.

X suit $B(5; 0,25)$.

Contrôle. $E(X) = 5 \times 0,25 = 1,25$ et, avec le tableau,

$0,3955 + 2 \times 0,2637 + 3 \times 0,0879 + 4 \times 0,0146 + 5 \times 0,0010 \approx 1,25$.

Réponse. a) 0,8965 et 0,3672 — b) $n = 5$, $p = 0,25$.

Correction de l'exercice 15 - Un jeu répété

a) Les 15 parties sont identiques et indépendantes, chacune gagnante avec la probabilité 0,2 : X suit $B(15; 0,2)$.

b) $E(X) = 15 \times 0,2 = 3$ parties gagnantes en moyenne.

Le gain total vaut $12X - 15 \times 3 = 12X - 45$ (gains moins mises). En moyenne :

$$12 \times 3 - 45 = 36 - 45 = -9 \text{ €}$$

Sur 15 parties, le joueur perd en moyenne 9 € : le jeu lui est défavorable (chaque partie lui coûte 0,60 € en moyenne, car $12 \times 0,2 = 2,40 < 3$).

Réponse. a) $B(15; 0,2)$ — b) $E(X) = 3$; gain moyen total -9 €.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un centre d'appels

a) Les 25 appels sont indépendants, chacun aboutissant à une vente avec la probabilité 0,2 : X suit $B(25; 0,2)$.

b) $E(X) = 25 \times 0,2 = 5$ ventes par jour en moyenne, et $\sigma(X) = \sqrt{25 \times 0,2 \times 0,8} = \sqrt{4} = 2$.

c) Aucune vente : $P(X = 0) = 0,8^{25} \approx 0,0038$.

« Au moins 8 » est le contraire de « au plus 7 » :

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,8909 = 0,1091$$

Lecture. Une journée sans vente est très rare (environ une sur 260) ; une journée à 8 ventes ou plus arrive environ une fois sur neuf.

Réponse. a) $B(25; 0,2)$ — b) 5 et 2 — c) $\approx 0,0038$ et $\approx 0,109$.