

Plaquette 4 - Loi normale : lire et calculer

Probabilités : lois binomiale et normale — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Notation. X suit $N(\mu; \sigma^2)$: moyenne μ , écart type σ .

Symétrie.

$$P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0,5$$

La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

Les trois intervalles de référence.

Intervalle	Probabilité
$[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$	$\approx 0,68$
$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$	$\approx 0,95$
$[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$	$\approx 0,997$

Ce qui reste en dehors.

Intervalle	En dehors	De chaque côté
$\pm\sigma$	$\approx 0,32$	$\approx 0,16$
$\pm 2\sigma$	$\approx 0,05$	$\approx 0,025$
$\pm 3\sigma$	$\approx 0,003$	$\approx 0,0015$

Les calculs à la calculatrice. Une fonction donne $P(a \leq X \leq b)$ directement. Pour une inégalité simple, on prend une borne très grande.

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$$

Combien d'écarts types ? Pour situer une valeur :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

△ $P(X = a) = 0$ pour une loi continue : seule une **plage** a une probabilité non nulle.

△ Ne pas confondre σ et σ^2 dans la notation $N(\mu; \sigma^2)$.

Correction de l'exercice 1 - Utiliser la symétrie

La courbe de la loi $N(500; 5^2)$ est symétrique par rapport à la droite $x = 500$.

a) La moyenne partage l'aire en deux moitiés égales :

$$P(X \leq 500) = 0,5$$

b) On découpe : $P(X \leq 500) = P(X \leq 495) + P(495 \leq X \leq 500)$, donc

$$P(X \leq 495) = 0,5 - 0,341 = 0,159$$

c) Par symétrie, 505 est à la même distance au-dessus de 500 que 495 en dessous :
 $P(X \geq 505) = P(X \leq 495) = 0,159$.

Réponse. a) 0,5 — b) 0,159 — c) 0,159.

Correction de l'exercice 2 - Les intervalles de référence

Avec $\mu = 500$ et $\sigma = 5$:

a) Les trois intervalles de référence sont $[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [495; 505]$,
 $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [490; 510]$ et $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma] = [485; 515]$.

b) Les probabilités associées, propriétés de toute loi normale :

$$P(495 \leq X \leq 505) \approx 0,68 \quad P(490 \leq X \leq 510) \approx 0,95 \quad P(485 \leq X \leq 515) \approx 0,997$$

Lecture. Environ 95 % des flacons contiennent entre 490 et 510 mL ; presque tous (99,7 %) entre 485 et 515 mL.

Réponse. a) $[495; 505]$, $[490; 510]$, $[485; 515]$ — b) $\approx 0,68$; $0,95$; $0,997$.

Correction de l'exercice 3 - Combien d'écarts types ?

On situe une valeur x par son écart à la moyenne, compté en écarts types :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \text{avec } \mu = 250, \sigma = 8$$

a) $z = \frac{266 - 250}{8} = 2$: 266 est à **deux écarts types au-dessus** de la moyenne.

b) $z = \frac{234 - 250}{8} = -2$: 234 est à deux écarts types **en dessous**.

c) $z = \frac{260 - 250}{8} = 1,25$: 260 est à 1,25 écart type au-dessus.

Lecture. Seulement 2,5 % environ des valeurs dépassent 266 (au-delà de $\mu + 2\sigma$).

Réponse. a) $+2\sigma$ — b) -2σ — c) $+1,25\sigma$.

Correction de l'exercice 4 - Calculs à la calculatrice

On utilise la fonction « loi normale » de la calculatrice avec $\mu = 250$ et $\sigma = 8$.

a) $P(240 \leq X \leq 260) \approx 0,789$ (intervalle symétrique de $\pm 1,25\sigma$, un peu plus large que $\pm\sigma$: on trouve plus que 0,68, c'est cohérent).

b) $P(X \geq 260) \approx 0,106$. Contrôle par symétrie : $\frac{1 - 0,789}{2} \approx 0,106$.

c) $P(X \leq 235) \approx 0,030$ (235 est à $-1,875\sigma$, un peu moins loin que -2σ : on trouve un peu plus que 0,025).

Méthode. Pour une inégalité simple, on prend une borne très éloignée, par exemple $P(X \geq 260) = P(260 \leq X \leq 10^9)$.

Réponse. a) $\approx 0,789$ — b) $\approx 0,106$ — c) $\approx 0,030$.

Correction de l'exercice 5 - Une durée de vie

X suit $N(20; 3^2)$ (en milliers d'heures).

a) $P(X > 25) \approx 0,048$ à la calculatrice (25 est à $\frac{25 - 20}{3} \approx 1,67$ écart type au-dessus de la moyenne).

b) $[17; 23] = [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$: $P(17 \leq X \leq 23) \approx 0,68$.

c) 15 est symétrique de 25 par rapport à 20 : $P(X < 15) = P(X > 25) \approx 0,048$.

Lecture. Environ 5 % des composants durent plus de 25 000 heures, et autant moins de 15 000 heures.

Réponse. a) $\approx 0,048$ — b) $\approx 0,68$ — c) $\approx 0,048$.

Correction de l'exercice 6 - Fixer une tolérance

a) La tolérance 75 ± 3 mm, soit $[72; 78]$, s'écarte de la moyenne de 3 mm de chaque côté :

$$\frac{3}{1,2} = 2,5 \text{ écarts types}$$

b) Le taux de rebut est la probabilité de sortir de $[72; 78]$: à la calculatrice,

$$P(72 \leq X \leq 78) \approx 0,9876 \quad \text{donc} \quad P(\text{rebut}) \approx 1 - 0,9876 = 0,0124$$

Environ 1,2 % de rebut. C'est entre les valeurs de référence 5 % (pour $\pm 2\sigma$) et 0,3 % (pour $\pm 3\sigma$), ce qui est cohérent avec $\pm 2,5\sigma$.

Réponse. a) 2,5 écarts types — b) environ 1,2 %.

Correction de l'exercice 7 - Un décentrage

Avec $\mu = 76$ et $\sigma = 1,2$:

a) Borne basse : $z = \frac{72 - 76}{1,2} \approx -3,33$; borne haute : $z = \frac{78 - 76}{1,2} \approx 1,67$. La tolérance n'est plus centrée sur la moyenne.

b) À la calculatrice : $P(X < 72) \approx 0,0004$ et $P(X > 78) \approx 0,0478$, donc

$$P(\text{rebut}) \approx 0,0004 + 0,0478 \approx 0,048$$

Le taux de rebut passe d'environ 1,2 % à 4,8 % : il est presque **quadruplé**, alors que la dispersion n'a pas changé. Recentrer la machine est la priorité.

Réponse. a) $-3,33\sigma$ et $+1,67\sigma$ — b) environ 4,8 %.

Correction de l'exercice 8 - Des notes

$\mu = 10,5$ et $\sigma = 2,8$.

a) $7,7 = 10,5 - 2,8$ et $13,3 = 10,5 + 2,8$: c'est l'intervalle $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$, de probabilité $\approx 0,68$. Environ 68 % des candidats ont une note entre 7,7 et 13,3.

b) $16,1 = 10,5 + 2 \times 2,8 = \mu + 2\sigma$: au-dessus, il reste environ $\frac{1 - 0,95}{2} = 0,025$, soit 2,5 % des candidats.

c) D'après b), environ 97,5 % des candidats ont moins de 16,1 : c'est la note cherchée (à la calculatrice, on trouve environ 16,0).

Réponse. a) $\approx 68\%$ — b) $\approx 2,5\%$ — c) environ 16,1.

Correction de l'exercice 9 - Repérer une erreur

L'erreur. Pour une loi **continue** comme la loi normale, la probabilité d'une valeur précise est nulle :

$$P(X = 500) = 0$$

Seules les **plages** de valeurs ont une probabilité non nulle (une aire sous la courbe).

Ce que l'élève voulait dire. 0,5 est la probabilité d'être **en dessous** (ou au-dessus) de la moyenne : $P(X \leq 500) = P(X \geq 500) = 0,5$, par symétrie de la courbe.

Réponse. $P(X = 500) = 0$; c'est $P(X \leq 500)$ qui vaut 0,5.

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux machines

La tolérance $[494; 506]$ s'écarte de 6 mL de la moyenne 500 de chaque côté.

a) Machine A ($\sigma = 2$) : $\frac{6}{2} = 3$, les bornes sont à $\pm 3\sigma$. Machine B ($\sigma = 5$) : $\frac{6}{5} = 1,2$, les bornes sont à $\pm 1,2\sigma$.

b) Taux de conformité :

— machine A : $P(494 \leq X \leq 506) \approx 0,997$ (intervalle de référence $\pm 3\sigma$) ;

— machine B : à la calculatrice, $P(494 \leq X \leq 506) \approx 0,770$.

Les deux machines ont la même moyenne, mais A, beaucoup moins dispersée, est presque toujours conforme ; B produit environ 23 % de non-conformes.

Réponse. a) $\pm 3\sigma$ et $\pm 1,2\sigma$ — b) $\approx 0,997$ contre $\approx 0,770$.

Correction de l'exercice 11 - Remonter à une valeur

On utilise les valeurs de référence, avec $\mu = 1000$ et $\sigma = 25$.

a) Au-dessus de $\mu + 2\sigma$, il reste environ 2,5 % des observations : la valeur cherchée est $1000 + 2 \times 25 = 1050$.

b) Au-dessus de $\mu + \sigma$, il reste environ 16 % : $1000 + 25 = 1025$.

c) Au-dessus de $\mu + 3\sigma$, il reste environ 0,15 % : $1000 + 3 \times 25 = 1075$.

Réponse. a) 1050 — b) 1025 — c) 1075.

Correction de l'exercice 12 - Deux seuils à comparer

$\mu = 12$ et $\sigma = 3$ minutes.

a) $18 = 12 + 2 \times 3 = \mu + 2\sigma$: environ 2,5 % des clients attendent plus de 18 minutes.

b) $6 = \mu - 2\sigma$: par symétrie, environ 2,5 % attendent moins de 6 minutes.

c) On cherche le temps t tel que $P(X \leq t) = 0,95$. À la calculatrice (inverse de la loi normale), $t \approx 16,9$ minutes : on peut garantir un temps d'attente inférieur à 17 minutes à 95 % des clients.

Piège. L'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ contient 95 % des valeurs, mais avec 2,5 % de chaque côté ; ici on veut 5 % d'un seul côté, d'où une valeur plus basse que 18.

Réponse. a) $\approx 2,5\%$ — b) $\approx 2,5\%$ — c) environ 17 minutes.

Correction de l'exercice 13 - Lire une courbe en cloche

a) L'écart type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne. La courbe **basse et large** étale les valeurs plus loin de 50 : c'est elle qui a le plus grand écart type. La courbe haute et étroite correspond à des valeurs concentrées près de 50, donc à un petit écart type.

b) L'aire totale sous une courbe de densité représente la probabilité de l'univers entier :
aire totale = 1

pour les deux courbes. C'est pourquoi la courbe large est plus basse : elle étale la même aire sur une plus grande largeur.

Réponse. a) la courbe basse et large — b) 1 pour chacune.

Correction de l'exercice 14 - Estimer sans calculatrice

Avec $\mu = 80$ et $\sigma = 6$, on reconnaît les intervalles de référence.

a) $[74; 86] = [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$: $P \approx 0,68$.

b) $92 = 80 + 2 \times 6 = \mu + 2\sigma$: au-dessus, $P(X \geq 92) \approx 0,025$.

c) $[68; 92] = [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] : P \approx 0,95$.

Réponse. a) $\approx 0,68$ — b) $\approx 0,025$ — c) $\approx 0,95$.

Correction de l'exercice 15 - Un réglage à corriger

a) 245 est à $\frac{245 - 248}{2} = -1,5$ écart type de la moyenne. À la calculatrice, $P(X < 245) \approx 0,067$, soit 6,7 % des sachets : c'est plus que les 2,5 % autorisés, le réglage **n'est pas conforme**.

b) On veut qu'il ne reste que 2,5 % des sachets sous 245 g, c'est-à-dire que 245 soit à 2σ sous la moyenne :

$$\mu - 2\sigma = 245 \Leftrightarrow \mu = 245 + 2 \times 2 = 249 \text{ g}$$

Il faut régler la machine sur une moyenne d'environ 249 g (à la calculatrice, avec $1,96\sigma$, on trouve 248,9 g).

Réponse. a) non ($\approx 6,7$ % sous 245 g) — b) environ 249 g.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un contrôle complet

$\mu = 1000$ et $\sigma = 25$ mL ; tolérance $[950; 1050]$.

a) $\frac{1050 - 1000}{25} = 2$ et $\frac{950 - 1000}{25} = -2$: les bornes sont à $\pm 2\sigma$.

b) Taux de conformité : $P(950 \leq X \leq 1050) \approx 0,95$, soit environ 95 % (et 5 % de bouteilles hors tolérance).

c) Avec $\sigma = 40$ mL, les bornes sont à $\pm \frac{50}{40} = \pm 1,25\sigma$. À la calculatrice, $P(950 \leq X \leq 1050) \approx 0,789$.

Le taux de conformité tombe d'environ 95 % à 79 % : une machine plus dispersée produit quatre fois plus de non-conformes, même bien centrée.

Réponse. a) $\pm 2\sigma$ — b) $\approx 0,95$ — c) $\approx 0,789$.