Plaquette 4 – Changement de variable

Statistiques à deux variables — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Repérer une courbure. Pour x régulièrement espacés, des écarts $y_{i+1} - y_i$ qui croissent ou décroissent régulièrement signalent un nuage incurvé.

Choisir le changement de variable.

Allure du nuage	Changement
monte de plus en plus vite	$z = x^2$ ou $z = \log(y)$
monte de moins en moins vite	$z = \sqrt{x}$
descend vite puis s'aplatit	$z = \frac{1}{x}$

La démarche.

1. Calculer les nouvelles valeurs (z_i ou $\log(y_i)$) et vérifier qu'elles sont presque alignées. 2. Ajuster : $y = az + b$, ou $\log(y) = ax + b$. 3. Revenir à la variable de départ, par exemple

$$\log(y) = ax + b \Leftrightarrow y = 10^b \times \left(10^a\right)^x$$

4. Prévoir avec la formule obtenue.

Correction de l'exercice 1 – Repérer une courbure

a) Les écarts sont :

$$11 - 3 = 8 \qquad 25 - 11 = 14 \qquad 45 - 25 = 20 \qquad 71 - 45 = 26$$

b) Les écarts augmentent régulièrement (de 6 à chaque fois) : le nuage monte de plus en plus vite, il est incurvé. Une droite le décrirait mal : elle passerait au-dessus des points du milieu et sous les points extrêmes.

Des écarts qui augmentent d'une quantité constante sont le signe d'une relation en x^2 : on propose le changement de variable $z = x^2$.

Réponse. a) 8 ; 14 ; 20 ; 26 — b) non : poser $z = x^2$.

Correction de l'exercice 2 – Un changement de variable en x²

a) $z_i = x_i^2$: 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25.

b) On remplace z par x^2 :

$$y \approx 2{,}84x^2 - 0{,}24$$

c) Pour $x = 6$, $z = 36$ et $y \approx 2{,}84 \times 36 - 0{,}24 \approx 102$.

Contrôle de la qualité : la somme des carrés des écarts vaut environ 0,37 avec ce modèle, contre 126 avec la droite directe $y = 17x - 20$. Le changement de variable a redressé le nuage.

Réponse. a) 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 — b) $y \approx 2{,}84x^2 - 0{,}24$ — c) ≈ 102.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Un changement de variable en 1/x

a) Les valeurs descendent très vite au début (de 62 à 34), puis de moins en moins : le nuage s’aplatit. Une droite le décrirait mal.

b) $z_i = \dfrac{1}{x_i}$: 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,2 ; 0,1. En remplaçant z :

$$y \approx \frac{56{,}44}{x} + 5{,}66$$

c) Pour $x = 20$: $y \approx \dfrac{56{,}44}{20} + 5{,}66 \approx 8{,}48$.

Quand x devient grand, $\dfrac{56{,}44}{x}$ devient très petit : le modèle prévoit que y se rapproche de 5,66, comme le suggère l’aplatissement du nuage.

Réponse. a) le nuage s’aplatit — b) $y \approx \dfrac{56{,}44}{x} + 5{,}66$ — c) $\approx 8{,}48$.

Correction de l’exercice 4 – Un changement de variable en racine

a) $z_i = \sqrt{x_i}$: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Les nouvelles abscisses sont régulièrement espacées, et les écarts entre les y_i (9, 8, 12, 9) sont à peu près constants : les points $(z_i\,;y_i)$ sont presque alignés.

b) En remplaçant z par $\sqrt{x}$:

$$y = 9{,}6\sqrt{x} + 1{,}8$$

Pour $x = 36$, $\sqrt{36} = 6$ et $y = 9{,}6 \times 6 + 1{,}8 = 59{,}4$.

Réponse. a) 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 — b) $y = 9{,}6\sqrt{x} + 1{,}8$; $y(36) = 59{,}4$.

Correction de l’exercice 5 – Choisir le bon changement

On associe chaque allure au modèle qui la produit.

a) Une forme $y = \dfrac{a}{x} + b$: poser $z = \dfrac{1}{x}$.

b) Des écarts en progression arithmétique correspondent à $y = ax^2 + b$: poser $z = x^2$.

c) Une croissance qui ralentit : poser $z = \sqrt{x}$.

d) Des quotients constants signalent une évolution exponentielle $y = k \times q^x$. On pose $z = \log(y)$, car

$$\log(y) = \log(k) + x\log(q)$$

est une expression affine de x.

Réponse. a) $z = \dfrac{1}{x}$ — b) $z = x^2$ — c) $z = \sqrt{x}$ — d) $z = \log(y)$.

Correction de l’exercice 6 – Redresser une croissance exponentielle

a) Les quotients valent $\dfrac{560}{500} = 1{,}12$, $\dfrac{627}{560} \approx 1{,}12$, $\dfrac{702}{627} \approx 1{,}12$ et $\dfrac{787}{702} \approx 1{,}12$: les ventes augmentent d’environ 12 % par an, le nuage est incurvé.

b) Les logarithmes valent :

$$2{,}6990 \quad 2{,}7482 \quad 2{,}7973 \quad 2{,}8463 \quad 2{,}8960$$

Leurs écarts successifs sont 0,0492 ; 0,0491 ; 0,0490 ; 0,0497, presque constants et égaux à $\log(1{,}12) \approx 0{,}0492$: les points $(x_i\,;z_i)$ sont presque alignés. Le changement de variable $z = \log(y)$ a redressé le nuage.

Réponse. a) quotients $\approx 1{,}12$ — b) écarts des $\log(y_i)$ presque constants ($\approx 0{,}0492$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Revenir à la variable de départ

a) De $\log(y) = 0{,}0492x + 2{,}699$, on déduit, par définition du logarithme décimal :

$$y = 10^{0{,}0492x + 2{,}699} = 10^{2{,}699} \times \left(10^{0{,}0492}\right)^x \approx 500 \times 1{,}12^x$$

On retrouve la valeur de départ (500) et le coefficient annuel (1,12, soit +12 % par an).

b) Au rang 6 : $y \approx 500 \times 1{,}12^6 \approx 987$ milliers de ventes.

Réponse. a) $y \approx 500 \times 1{,}12^x$ — b) environ 987 milliers.

Correction de l’exercice 8 – Un ajustement donné en logarithme

a) On revient à N :

$$N = 10^{0{,}03x + 3{,}2} = 10^{3{,}2} \times \left(10^{0{,}03}\right)^x \approx 1585 \times 1{,}0715^x$$

b) Le coefficient mensuel est $10^{0{,}03} \approx 1{,}0715$: une hausse d’environ 7,15 % par mois.

c) Au rang 10, $z = 0{,}3 + 3{,}2 = 3{,}5$, donc $N = 10^{3{,}5} \approx 3162$ abonnés. Calculer d’abord z, puis 10^z, évite les erreurs d’arrondi.

Réponse. a) $N \approx 1585 \times 1{,}0715^x$ — b) $\approx +7{,}15\,\%$ par mois — c) ≈ 3162.

Correction de l’exercice 9 – Un coût moyen par changement de variable

a) En remplaçant z par $\dfrac{1}{n}$:

$$c \approx \frac{604{,}6}{n} + 19{,}9$$

On reconnaît la forme d’un coût moyen : 604,6 € représente environ les **coûts fixes**, répartis sur les n articles, et 19,9 € le coût de production d’un article.

b) Pour $n = 200$: $c \approx \dfrac{604{,}6}{200} + 19{,}9 \approx 22{,}92$ €. C’est une extrapolation (la plage observée s’arrête à 100), cohérente avec la baisse lente du coût moyen.

Réponse. a) $c \approx \dfrac{604{,}6}{n} + 19{,}9$ — b) $\approx 22{,}92$ €.

Correction de l’exercice 10 – La distance de freinage

a) Les écarts successifs (10,3 ; 15,6 ; 20,9 ; 25,9) augmentent régulièrement : le nuage est incurvé, et une droite donnerait même une distance négative pour une vitesse de 20 km/h.

b) Avec $u = v^2 = 16\,900$:

$$d \approx 0{,}0065 \times 16\,900 \approx 109{,}9 \text{ m}$$

La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse : passer de 65 à 130 km/h la multiplie par 4, et non par 2.

Réponse. a) nuage incurvé — b) $\approx 109{,}9$ m.

Correction de l’exercice 11 – Vérifier un alignement exact

Les z_i valent 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25. On compare y_i et z_i :

$$2 - 1 = 5 - 4 = 10 - 9 = 17 - 16 = 26 - 25 = 1$$

Pour chaque point, $y_i = z_i + 1$: les points $(z_i\,;y_i)$ sont tous sur la droite d’équation $y = z + 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

En revenant à x : $y = x^2 + 1$. Le changement de variable a transformé une parabole en droite.

Réponse. $y = z + 1$, soit $y = x^2 + 1$.

Correction de l'exercice 12 – Repérer une erreur

L'élève a calculé $\log(y)$, pas y : il a oublié de revenir à la variable de départ.

$$\log(y) \approx 3{,}0926 \Longrightarrow y = 10^{3{,}0926} \approx 1237$$

Les ventes prévues sont d'environ 1237 milliers. Son résultat, 3,09 milliers, était d'ailleurs absurde : les ventes valaient déjà 500 milliers au rang 0 et augmentent chaque année.

Réponse. $y = 10^{3{,}0926} \approx 1237$ milliers.

Correction de l'exercice 13 – Calculer les logarithmes avec Python

a) Pour chaque valeur de Y, le programme ajoute à Z son logarithme décimal arrondi à 10^{-4} :

$$Z = [2{,}699\,;\ 2{,}7482\,;\ 2{,}7973\,;\ 2{,}8463\,;\ 2{,}896]$$

b) On parcourt les rangs de 0 à l'avant-dernier et l'on affiche la différence de deux termes voisins :

```
for i in range(len(Z) - 1):
    print(Z[i + 1] - Z[i])
```

Des écarts presque constants confirment que le changement de variable a redressé le nuage.

Réponse. a) les $\log(y_i)$ arrondis — b) une boucle qui affiche $Z[i+1] - Z[i]$.

Correction de l'exercice 14 – Un seuil avec un modèle exponentiel

On résout $500 \times 1{,}12^x > 1500$, soit $1{,}12^x > 3$. On prend le logarithme décimal, et $\log(1{,}12) > 0$:

$$x > \frac{\log(3)}{\log(1{,}12)} \approx 9{,}69$$

Le premier rang entier est 10. Contrôle : $500 \times 1{,}12^9 \approx 1387$ et $500 \times 1{,}12^{10} \approx 1553$.

Ce résultat est une extrapolation à cinq ans au-delà des données : il suppose que la croissance de 12 % par an se maintient.

Réponse. À partir du rang 10.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : des téléchargements

a) Les écarts successifs (600 ; 780 ; 1014 ; 1318 ; 1714) augmentent : le nuage est incurvé. Les quotients sont tous égaux à 1,3, signe d'une croissance exponentielle.

b) On revient à y : $y = 10^{3{,}301} \times \left(10^{0{,}1139}\right)^x \approx 2000 \times 1{,}3^x$.

c) Au rang 7 : $y \approx 2000 \times 1{,}3^7 \approx 12\,550$. Pour dépasser 20 000, on résout $1{,}3^x > 10$:

$$x > \frac{\log(10)}{\log(1{,}3)} = \frac{1}{\log(1{,}3)} \approx 8{,}78$$

soit à partir du rang 9.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. b) $y \approx 2000 \times 1{,}3^{x}$ — c) $\approx 12\,550$ au rang 7 ; à partir du rang 9.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).