

Plaquette 4 – Changement de variable et lissage

Statistiques à deux variables – Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le changement de variable. On remplace x par une expression z qui redresse le nuage.

Allure du nuage	Changement à tenter
décroissance rapide qui s'aplatit	$z = \frac{1}{x}$
croissance qui s'accélère	$z = x^2$
croissance qui s'essouffle	$z = \sqrt{x}$

La méthode en trois temps.

Étape	Ce qu'on fait
1	calculer les z_i
2	ajuster y en fonction de z : $y = az + b$
3	revenir à x en remplaçant z par son expression

Contrôle. Le coefficient de corrélation doit être bien meilleur après changement de variable.

Les moyennes mobiles. Elles lissent une série chronologique en effaçant les à-coups.

Moyenne mobile d'ordre 3 :

$$\frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$$

Moyenne mobile d'ordre 4 **centrée** (données trimestrielles) :

$$\frac{\frac{1}{2}y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{1}{2}y_{t+2}}{4}$$

Coefficients saisonniers. Pour chaque trimestre, on moyenne les rapports :

$$\frac{\text{valeur du trimestre}}{\text{moyenne de l'année}}$$

La somme des quatre coefficients doit valoir 4.

Désaisonnaliser. On divise chaque valeur par le coefficient de son trimestre.

Correction de l'exercice 1 – Repérer une courbure

a) **Premier écart** : $11 - 3$ ✓

— **Valeur** : 8 ✓

— **Deuxième** : $25 - 11$ ✓

— **Valeur** : 14 ✓

— **Troisième** : $45 - 25$ ✓

- **Valeur** : 20 ✓
- **Quatrième** : 71 – 45 ✓
- **Valeur** : 26 ✓
- **Liste** :

8 14 20 26

b) **Constat** : les écarts **augmentent** ✓

- **De combien à chaque fois** : 6 ✓
- **Ils forment eux-mêmes une suite arithmétique** ✓
- **Conclusion** : l'ajustement affine ne convient **pas** ✓
- **Allure du nuage** : une courbe qui s'accélère ✓
- **Coefficient de corrélation direct** : $\approx 0,979$ ✓
- **Il semble bon, mais trompeur** ✓
- **Raison** : la tendance est nettement croissante ✓
- **Ce que révèlent les résidus** : une forme en cuvette ✓
- **Changement de variable à tenter** :

$$z = x^2$$

- **Justification** : les écarts croissent linéairement ✓
- **Signature d'un modèle du second degré** ✓

Réponse. a) 8 ; 14 ; 20 ; 26 · b) non : les écarts croissent, il faut poser $z = x^2$.

Correction de l'exercice 2 - Changement de variable en x carré

a) **Calcul des carrés** : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ✓

- **Nouveau tableau** :

z_i	1	4	9	16	25
y_i	3	11	25	45	71

- **Écarts en z** : 3 ; 5 ; 7 ; 9 ✓
- **Écarts en y** : 8 ; 14 ; 20 ; 26 ✓
- **Rapports** : $\approx 2,67$; 2,8 ; $\approx 2,86$; $\approx 2,89$ ✓
- **Ils sont proches** ✓

b) **Valeur de r** : 0,9999 ✓

- **Comparaison à l'ajustement direct** : 0,979 ✓
- **Conclusion** :

le changement de variable a redressé le nuage

- **Expression en fonction de x** :

$$y \approx 2,84x^2 - 0,24$$

c) **Substitution de $x = 6$** : $2,84 \times 36 - 0,24$ ✓

- **Produit** : 102,24 ✓
- **Prévision** :

$$\approx 102$$

- **Contrôle avec l'ajustement affine direct** : $17 \times 6 - 20 = 82$ ✓
- **Écart** : 20 ✓

- **Lequel croire** : celui de meilleur r ✓
- **Contrôle de la tendance** : les écarts continuent de croître ✓
- **Écart attendu de $x = 5$ à 6** : 32 ✓
- **Contrôle** : $102 - 71 = 31$ ✓

Réponse. a) 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 · b) r passe de 0,979 à 0,9999 · c) ≈ 102 .

Correction de l'exercice 3 - Changement de variable en $1/x$

- a) **Écarts en y** : -28 ; -14 ; -3 ; -6 ✓
- **Ils sont très irréguliers** ✓
 - **Allure** : une chute rapide qui s'aplatit ✓
 - **Coefficient de corrélation direct** : $\approx -0,799$ ✓
 - **Comparaison au seuil 0,95** : bien en dessous ✓
 - **Conclusion** : ajustement affine **mauvais** ✓
 - **Signature** : une décroissance hyperbolique ✓
- b) **Calcul des z_i** : 1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,2 ; 0,1 ✓
- **Nouveau coefficient de corrélation** : $\approx 0,9999$ ✓
 - **Appréciation** : excellent ✓
 - **Expression en fonction de x** :

$$y \approx \frac{56,44}{x} + 5,66$$

- **Contrôle en $x = 1$** : 62,10 ✓
- **Observation** : 62 ✓
- **Contrôle en $x = 4$** : $\approx 19,77$ ✓
- **Observation** : 20 ✓
- **Contrôle en $x = 10$** : $\approx 11,30$ ✓
- **Observation** : 11 ✓
- **Concordance excellente** ✓
- **Prévision pour $x = 20$** : $\approx 8,48$ ✓
- **Interprétation de 5,66** : la valeur vers laquelle y tend ✓
- **Modèle typique** : un coût moyen avec charges fixes ✓

Réponse. a) $r \approx -0,799$, trop faible · b) avec $z = \frac{1}{x}$, $r \approx 0,9999$ et $y \approx \frac{56,44}{x} + 5,66$.

Correction de l'exercice 4 - Changement de variable en racine

- a) **Racines carrées** : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ✓
- **Nouveau tableau** :

z_i	1	2	3	4	5
y_i	12	21	29	41	50

- **Écarts en y** : 9 ; 8 ; 12 ; 9 ✓
- **Ils sont proches de 9,6** ✓
- **Cohérent avec la pente** ✓

- b) **Substitution** :

$$y \approx 9,6\sqrt{x} + 1,8$$

— **Prévision pour** $x = 36 : \sqrt{36} = 6$ ✓

— **Calcul** : $9,6 \times 6 + 1,8$ ✓

— **Produit** : $57,6$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 59,4$$

— **Contrôle en** $x = 25 : 9,6 \times 5 + 1,8$ ✓

— **Valeur** : $49,8$ ✓

— **Observation** : 50 ✓

— **Écart** : $0,2$ ✓

— **Contrôle en** $x = 1 : 11,4$ ✓

— **Observation** : 12 ✓

— **Allure du modèle** : une croissance qui **ralentit** ✓

— **Justification** : la racine croît de moins en moins vite ✓

— **Application typique** : un rendement décroissant ✓

— **Corrélation directe** : $\approx 0,986$ ✓

— **Gain du changement** : r passe à $0,998$ ✓

Réponse. a) $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$ · b) $y \approx 9,6\sqrt{x} + 1,8$, et $y(36) \approx 59,4$.

Correction de l'exercice 5 - Choisir le bon changement

a) **Forme** : une hyperbole décroissante ✓

— **Changement** :

$$z = \frac{1}{x}$$

— **Modèle obtenu** : $y = \frac{a}{z} + b$, soit $y = \frac{a}{x} + b$ ✓

— **Interprétation de** b : la valeur limite ✓

— **Exemple type** : un coût moyen ✓

b) **Forme** : une croissance accélérée ✓

— **Changement** :

$$z = x^2$$

— **Modèle obtenu** : $y = ax^2 + b$ ✓

— **Signature** : des écarts qui croissent linéairement ✓

— **Exemple type** : une aire en fonction d'une longueur ✓

c) **Forme** : une croissance qui s'essouffle ✓

— **Changement** :

$$z = \sqrt{x}$$

— **Modèle obtenu** : $y = a\sqrt{x} + b$ ✓

— **Signature** : des écarts qui diminuent ✓

— **Exemple type** : un rendement décroissant ✓

— **Méthode générale** : tracer d'abord le nuage ✓

— **Puis** : tester le changement et comparer les r ✓

— **Critère de réussite** : $|r|$ nettement plus grand ✓

— **Cas où aucun changement ne marche** : les données sont trop dispersées ✓

— **Décision alors** : ne pas prévoir ✓

- **Piège** : choisir le changement qui « fait joli » ✓
- **Bonne pratique** : justifier par la forme **et** par r ✓

Réponse. a) $z = \frac{1}{x}$ · b) $z = x^2$ · c) $z = \sqrt{x}$.

Correction de l'exercice 6 - Moyennes mobiles d'ordre 3

- **Première moyenne** : $\frac{120 + 145 + 180}{3}$ ✓
- **Somme** : 445 ✓
- **Valeur** :
 $\approx 148,33$
- **Deuxième** : $\frac{145 + 180 + 95}{3}$ ✓
- **Somme** : 420 ✓
- **Valeur** : 140 ✓
- **Troisième** : $\frac{180 + 95 + 130}{3}$ ✓
- **Somme** : 405 ✓
- **Valeur** : 135 ✓
- **Quatrième** : $\frac{95 + 130 + 158}{3}$ ✓
- **Somme** : 383 ✓
- **Valeur** : $\approx 127,67$ ✓
- **Cinquième** : $\frac{130 + 158 + 195}{3}$ ✓
- **Somme** : 483 ✓
- **Valeur** : 161 ✓
- **Sixième** : $\frac{158 + 195 + 102}{3}$ ✓
- **Somme** : 455 ✓
- **Valeur** : $\approx 151,67$ ✓
- **Série lissée** :
 $148,33 \quad 140 \quad 135 \quad 127,67 \quad 161 \quad 151,67$
- **Nombre de valeurs perdues** : deux, une à chaque bout ✓
- **Effet du lissage** : les à-coups sont atténués ✓

Réponse. 148,33 ; 140 ; 135 ; 127,67 ; 161 ; 151,67.

Correction de l'exercice 7 - Effet du lissage

- **Maximum brut** : 195 ✓
- **Minimum brut** : 95 ✓
- **Étendue brute** :
 100
- **Maximum lissé** : 161 ✓
- **Minimum lissé** : $\approx 127,67$ ✓
- **Étendue lissée** : $161 - 127,67$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx 33,33$
- **Rapport des étendues** : ≈ 3 ✓

- **Conclusion** : le lissage divise la dispersion par trois ✓
- **Interprétation** : les variations saisonnières sont effacées ✓
- **Ce qui reste visible** : la tendance de fond ✓
- **Tendance ici** : légèrement croissante ✓
- **Comparaison des moyennes, brute** : $\frac{1125}{8}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 140,63$ ✓
- **Moyenne lissée** : $\frac{863,67}{6}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 143,95$ ✓
- **Elles sont proches** ✓
- **Le lissage conserve le niveau** ✓
- **Ce qu'il modifie** : seulement les écarts ✓
- **Coût du lissage** : on perd des points aux extrémités ✓

Réponse. Étendue de 100 à $\approx 33,33$: le lissage divise la dispersion par environ trois.

Correction de l'exercice 8 - Moyennes mobiles centrées d'ordre 4

- **Formule** : demi-poids aux extrémités ✓
- **Écriture** : $\frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5}{4}$ ✓
- **Demi-valeur de y_1** : 60 ✓
- **Demi-valeur de y_5** : 65 ✓
- **Somme** : $60 + 145 + 180 + 95 + 65$ ✓
- **Total** : 545 ✓
- **Division par 4** : $\frac{545}{4}$ ✓
- **Valeur** :
 $136,25$
- **Trimestre suivant** : $\frac{\frac{1}{2}y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \frac{1}{2}y_6}{4}$ ✓
- **Demi-valeur de y_2** : 72,5 ✓
- **Demi-valeur de y_6** : 79 ✓
- **Somme** : $72,5 + 180 + 95 + 130 + 79$ ✓
- **Total** : 556,5 ✓
- **Division** : $\frac{556,5}{4}$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx 139,13$
- **Pourquoi les demi-poids** : pour **centrer** la moyenne sur un trimestre ✓
- **Sans eux** : la moyenne tomberait entre deux trimestres ✓
- **Somme des poids** : $\frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 4$ ✓
- **Cohérence avec la division par 4** ✓
- **Valeurs perdues** : deux à chaque bout ✓

Réponse. 136,25 puis $\approx 139,13$.

Correction de l'exercice 9 - Coefficients saisonniers

- **Moyenne de l'année 1** : $\frac{540}{4}$ ✓
- **Valeur** : 135 ✓
- **Moyenne de l'année 2** : $\frac{585}{4}$ ✓
- **Valeur** : 146,25 ✓
- **Moyenne de l'année 3** : $\frac{631}{4}$ ✓
- **Valeur** : 157,75 ✓
- **Rapports du 1er trimestre** : $\frac{120}{135}, \frac{130}{146,25}, \frac{141}{157,75}$ ✓
- **Valeurs** : $\approx 0,889$; $\approx 0,889$; $\approx 0,894$ ✓
- **Moyenne** :
$$C_1 \approx 0,891$$
- **2e trimestre, moyenne des rapports** :
$$C_2 \approx 1,077$$
- **3e trimestre** :
$$C_3 \approx 1,333$$
- **4e trimestre** :
$$C_4 \approx 0,699$$
- **Contrôle de la somme** : $0,891 + 1,077 + 1,333 + 0,699$ ✓
- **Total** : 4 ✓
- **Concordance** ✓
- **Lecture de C_3** : le 3^e trimestre fait 33 % de plus que la moyenne ✓
- **Lecture de C_4** : le 4^e fait 30 % de moins ✓
- **Interprétation** : une activité fortement estivale ✓

Réponse. $C_1 \approx 0,891$; $C_2 \approx 1,077$; $C_3 \approx 1,333$; $C_4 \approx 0,699$.

Correction de l'exercice 10 - Désaisonnaliser

- **Principe** : diviser par le coefficient du trimestre ✓
- **Premier trimestre** : $\frac{141}{0,891}$ ✓
- **Valeur** :
$$\approx 158,2$$
- **Deuxième** : $\frac{170}{1,077}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 157,8$ ✓
- **Troisième** : $\frac{210}{1,333}$ ✓
- **Valeur** :
$$\approx 157,5$$
- **Quatrième** : $\frac{110}{0,699}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 157,4$ ✓
- **Série désaisonnalisée** : 158,2 ; 157,8 ; 157,5 ; 157,4 ✓

- **Constat** : les quatre valeurs sont **très proches** ✓
- **Interprétation** : l'activité de fond est stable ✓
- **Ce que masquait la série brute** : des écarts de 100 ✓
- **Contrôle avec la moyenne annuelle** : 157,75 ✓
- **Les valeurs désaisonnalisées tournent autour** ✓
- **Concordance** ✓
- **Utilité** : comparer deux trimestres différents ✓
- **Exemple** : le 4^e trimestre a-t-il été bon ? ✓
- **Réponse brute** : 110, le plus faible ✓
- **Réponse désaisonnalisée** : 157,4, conforme ✓
- **Conclusion** : il n'a rien de mauvais ✓

Réponse. $\approx 158,2$; 157,8 ; 157,5 ; 157,4 : l'activité de fond est stable.

Correction de l'exercice 11 - Prévoir avec les coefficients

- **Principe** : multiplier par le coefficient ✓
- **C'est l'opération inverse de la désaisonnalisation** ✓
- **Premier trimestre** : $168 \times 0,891$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx 149,7$
- **Deuxième** : $168 \times 1,077$ ✓
- **Valeur** : $\approx 180,9$ ✓
- **Troisième** : $168 \times 1,333$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx 223,9$
- **Quatrième** : $168 \times 0,699$ ✓
- **Valeur** : $\approx 117,4$ ✓
- **Contrôle de la somme** : $149,7 + 180,9 + 223,9 + 117,4$ ✓
- **Total** : $\approx 671,9$ ✓
- **Moyenne** : ≈ 168 ✓
- **Concordance avec la tendance** ✓
- **Explication** : la somme des coefficients vaut 4 ✓
- **Comparaison à l'année 3, 3e trimestre** : 210 ✓
- **Prévision** : ≈ 224 ✓
- **Hausse** : $\approx +6,6\%$ ✓
- **Cohérence avec la tendance** : $\frac{168}{157,75} \approx 1,065$ ✓
- **Utilité** : planifier les stocks trimestre par trimestre ✓

Réponse. $\approx 149,7$; 180,9 ; 223,9 ; 117,4.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

- **Erreur** : il a oublié de revenir à x ✓
- **Relation posée** : $z = x^2$ ✓
- **Substitution correcte** : remplacer z par x^2 ✓
- **Expression correcte** :

$$y \approx 2,84x^2 - 0,24$$

- **Contrôle en $x = 5$, formule correcte** : $2,84 \times 25 - 0,24$ ✓
- **Valeur** : $\approx 70,76$ ✓
- **Observation** : 71 ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle avec sa formule** : $2,84 \times 5 - 0,24$ ✓
- **Valeur** : $\approx 13,96$ ✓
- **Écart avec 71** : énorme ✓
- **Preuve de l'erreur** ✓
- **Quand la formule en z est-elle utilisable** : seulement avec les z_i ✓
- **Ici** : $z = 25$ donne bien 70,76 ✓
- **Méthode de contrôle systématique** ✓
- **Étape 1** : tester la formule finale sur un point du tableau ✓
- **Étape 2** : vérifier l'ordre de grandeur ✓
- **Réflexe de rédaction** : écrire « comme $z = x^2$, on a... » ✓
- **Autre erreur voisine** : oublier la racine avec $z = \sqrt{x}$ ✓
- **Ou l'inverse avec $z = \frac{1}{x}$** ✓
- **Leçon** : le changement de variable se fait dans les **deux** sens ✓

Réponse. Il faut revenir à x : $y \approx 2,84x^2 - 0,24$.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux ajustements

a) **Critère** : la valeur absolue de r ✓

- **Comparaison** : $0,997 > 0,84$ ✓
- **Choix** :

l'ajustement après changement de variable

- **Contrôle du seuil** : $0,997 > 0,95$ ✓
- **L'ajustement direct est en dessous** ✓
- **Conclusion** : lui seul est utilisable ✓
- b) **Avec le mauvais ajustement** : les prévisions sont biaisées ✓
 - **Type de biais** : systématique, pas aléatoire ✓
 - **Signature** : des résidus tous du même signe par zones ✓
 - **Avec le bon ajustement** : les résidus sont petits ✓
 - **Et sans tendance** ✓
 - **Effet sur une extrapolation** : le biais s'amplifie ✓
 - **Exemple** : un modèle affine sur des données hyperboliques ✓
 - **Il prédirait des valeurs négatives** ✓
 - **Ce que le bon modèle prédit** : une limite positive ✓
 - **Différence de nature** : pas seulement de précision ✓
 - **Règle de rédaction** : justifier le choix par r ✓
 - **Et par la forme du nuage** ✓
 - **Piège** : garder le modèle affine « parce qu'il est simple » ✓
 - **Conséquence** : une décision fondée sur une prévision fausse ✓

Réponse. a) celui après changement de variable · b) les prévisions du modèle direct seraient biaisées, surtout en extrapolation.

Correction de l'exercice 14 - Lisser puis ajuster

a) **Somme des x** : 21 ✓

— **Moyenne** : 3,5 ✓

— **Somme des valeurs lissées** : $148,33 + 140 = 288,33$ ✓

— **Puis** : $288,33 + 135 = 423,33$ ✓

— **Puis** : $423,33 + 127,67 = 551$ ✓

— **Puis** : $551 + 161 + 151,67$ ✓

— **Total** : $\approx 863,67$ ✓

— **Moyenne** : $\frac{863,67}{6}$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 143,95$$

— **Point moyen** : $G(3,5; \approx 143,95)$ ✓

b) **Variation totale** : $151,67 - 148,33$ ✓

— **Valeur** : $\approx 3,34$ ✓

— **Variation de x** : 5 ✓

— **Pente approximative** :

$$\approx 0,67$$

— **Signe** : positif ✓

— **Interprétation** : la tendance de fond est légèrement croissante ✓

— **Comparaison à la série brute** : elle oscillait de 95 à 195 ✓

— **Le lissage révèle une progression lente** ✓

— **Limite de cette estimation** : la série lissée reste irrégulière ✓

— **Cause** : seulement trois cycles de données ✓

— **Recommandation** : allonger la série ✓

— **Ou** : utiliser les moyennes mobiles d'ordre 4 ✓

— **Raison** : elles collent au cycle trimestriel ✓

Réponse. a) $G(3,5; \approx 143,95)$ · b) pente $\approx 0,67$: tendance de fond légèrement croissante.

Correction de l'exercice 15 - Une saisonnalité à interpréter

a) **Somme** : $0,72 + 0,95$ ✓

— **Valeur** : 1,67 ✓

— **Puis** : $1,67 + 0,88 + 1,45$ ✓

— **Total** :

$$4$$

— **Cohérence confirmée** ✓

b) **Trimestre le plus fort** : le 4^e ✓

— **Écart à la moyenne** : +45 % ✓

— **Trimestre le plus faible** : le 1^{er} ✓

— **Écart** : -28 % ✓

— **Profil typique** : un commerce de fin d'année ✓

— **Exemple** : jouets, cadeaux, décoration ✓

- **Rapport entre extrêmes** : $\frac{1,45}{0,72} \approx 2,01$ ✓
- **Lecture** : le 4^e vaut deux fois le 1^{er} ✓
- c) **Valeur attendue** : $60\,000 \times 1,45$ ✓
- **Valeur** :
87 000 €
- **Comparaison à l'observation** : identiques ✓
- **Conclusion** : le trimestre est **conforme** ✓
- **Il n'est ni bon ni mauvais** ✓
- **Piège** : se réjouir d'un chiffre élevé ✓
- **Ce qu'il faut comparer** : la valeur désaisonnalisée ✓
- **Calcul** : $\frac{87\,000}{1,45}$ ✓
- **Valeur** : 60 000 € ✓
- **Égale à la tendance** ✓
- **Conclusion confirmée** ✓

Réponse. a) la somme vaut 4 · b) activité de fin d'année · c) conforme :
 $60\,000 \times 1,45 = 87\,000$ €.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : redresser un nuage

- a) **Écarts en y** : -28 ; -14 ; -3 ; -6 ✓
- **Ils sont très irréguliers** ✓
- **Forme** : chute rapide puis aplatissement ✓
- **Corrélation directe** : $\approx -0,799$ ✓
- **Insuffisante** ✓
- **Signature** : une hyperbole ✓
- **Changement justifié** :

$$z = \frac{1}{x}$$

- b) **Substitution** :

$$y \approx \frac{56,44}{x} + 5,66$$

- **Contrôle en x = 2** : $28,22 + 5,66$ ✓
- **Valeur** : $\approx 33,88$ ✓
- **Observation** : 34 ✓
- **Concordance** ✓

- c) **Substitution de x = 8** : $\frac{56,44}{8} + 5,66$ ✓

- **Quotient** : 7,055 ✓
- **Somme** : $\approx 12,72$ ✓
- **Prévision** :

$$\approx 12,7$$

- **Contrôle de vraisemblance** : entre 17 et 11 ✓
- **Interprétation de 5,66** : la valeur vers laquelle y tend ✓
- **Quand x devient grand** : $\frac{56,44}{x}$ tend vers 0 ✓

- **Donc** : y se rapproche de 5,66 ✓
- **Sans jamais descendre en dessous** ✓
- **Interprétation économique** : le coût variable unitaire ✓
- **Et 56,44** : les charges fixes à répartir ✓

Réponse. a) le nuage est hyperbolique · b) $y \approx \frac{56,44}{x} + 5,66$ · c) $\approx 12,7$, et 5,66 est la valeur limite.