Plaquette 5 – Décider à partir d'un ajustement

Statistiques à deux variables — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lire la pente en euros. Si $y = ax + b$, une hausse de Δx entraîne en moyenne une hausse de $a \times \Delta x$ de y. On compare ce gain au coût de la hausse.

Juger la qualité de l'ajustement. Nuage presque aligné, résidus petits et sans tendance, somme des carrés des écarts

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

faible par rapport aux autres modèles possibles.

Optimiser. Si les ventes suivent $q = ap + b$, le chiffre d'affaires $R(p) = p \times q$ et la marge $M(p) = (p - c) \times q$ sont des polynômes du second degré : on les étudie avec la dérivée.

Rester prudent. Une prévision hors de la plage observée est une extrapolation ; un bon ajustement ne prouve pas une causalité.

Correction de l'exercice 1 – Budget publicitaire et ventes

a) Chaque millier d'euros de publicité supplémentaire correspond en moyenne à 3,08 ventes de plus, sur la plage observée (10 à 35 k€).

b) Pour $x = 40$:

$$y = 3{,}08 \times 40 + 55{,}2 = 123{,}2 + 55{,}2 = 178{,}4$$

soit environ 178 ventes. C'est une extrapolation légère (5 k€ au-delà des données) ; les résidus de l'ajustement, compris entre $-1{,}2$ et $1{,}4$, montrent que le modèle colle bien aux observations.

Réponse. a) 3,08 ventes par k€ — b) ≈ 178 ventes.

Correction de l'exercice 2 – Rentabilité d'un budget

a) 1000 € de plus correspondent à $\Delta x = 1$, donc à 3,08 ventes de plus en moyenne, soit une marge supplémentaire de

$$3{,}08 \times 280 = 862{,}40 \text{ €}$$

b) Ces 862,40 € de marge coûtent 1000 € de publicité : chaque millier d'euros investi fait perdre environ 137,60 €. Il ne faut pas augmenter le budget, sauf si la publicité a d'autres effets (notoriété, fidélisation) que les ventes immédiates ne mesurent pas.

Réponse. a) 862,40 € — b) non : le gain est inférieur aux 1000 € investis.

Correction de l'exercice 3 – Surface et chiffre d'affaires

a) Chaque m² de surface supplémentaire correspond en moyenne à 2,33 k€ de chiffre d'affaires annuel, soit 2330 €.

b) $y \approx 2{,}33 \times 300 + 2{,}83 \approx 701{,}83$ k€, soit environ 702 k€ (extrapolation : la plage observée s'arrête à 250 m²).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On résout :

$$2{,}33x + 2{,}83 = 600 \Leftrightarrow x = \frac{600 - 2{,}83}{2{,}33} \approx 256$$

Il faudrait environ 256 m², juste au-delà du plus grand magasin observé.

Réponse. a) 2,33 k€ par m² — b) ≈ 702 k€ — c) ≈ 256 m².

Correction de l’exercice 4 – Prix et quantités vendues

a) La pente est négative : chaque euro de hausse du prix fait perdre en moyenne 22,5 ventes.

b) On calcule :

$$q(15) = -22{,}5 \times 15 + 749 = 411{,}5 \qquad q(22) = -22{,}5 \times 22 + 749 = 254$$

La première prévision est une interpolation (15 est entre 12 et 20), fiable. La seconde est une extrapolation : au-delà de 20 €, les clients pourraient réagir plus fortement que le modèle ne le prévoit.

Réponse. a) −22,5 ventes par euro — b) ≈ 411,5 et 254 ventes.

Correction de l’exercice 5 – Maximiser le chiffre d’affaires

a) $R(p) = p(-22{,}5p + 749) = -22{,}5p^2 + 749p$.

b) On dérive :

$$R'(p) = -45p + 749$$

$R'(p) > 0 \Leftrightarrow p < \frac{749}{45} \approx 16{,}64$: R est croissante puis décroissante, et son maximum est atteint pour $p \approx 16{,}64$ €.

Le chiffre d’affaires maximal vaut alors $R(16{,}64) \approx 6233$ €. Ce prix est dans la plage observée : la conclusion est fiable.

Réponse. a) $R(p) = -22{,}5p^2 + 749p$ — b) $p \approx 16{,}64$ €.

Correction de l’exercice 6 – Maximiser la marge

a)
$M(p) = (p - 8)(-22{,}5p + 749) = -22{,}5p^2 + 749p + 180p - 5992 = -22{,}5p^2 + 929p - 5992$.

b) $M'(p) = -45p + 929$ s’annule pour

$$p = \frac{929}{45} \approx 20{,}64$$

positive avant, négative après : la marge est maximale pour un prix d’environ 20,64 €.

c) Le prix optimal pour la marge dépasse de 4 € celui qui maximise le chiffre d’affaires : vendre moins mais plus cher rapporte plus quand chaque article coûte 8 €. Attention, 20,64 € est juste au-delà des prix observés.

Réponse. a) $M(p) = -22{,}5p^2 + 929p - 5992$ — b) ≈ 20,64 € — c) 4 € de plus.

Correction de l’exercice 7 – Une prévision à critiquer

a) 2045 correspond à $x = 30$:

$$y = 3{,}5 \times 30 + 40 = 145$$

b) Les données couvrent 9 ans ($x = 0$ à 8), et la prévision porte 22 ans au-delà du dernier relevé. C’est une extrapolation abusive : sur une telle durée, la tendance peut s’infléchir

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

(saturation, concurrence, crise). Le chiffre 145 ne doit pas être présenté comme une prévision, tout au plus comme le prolongement d'une tendance, avec une réserve explicite.

Réponse. a) 145 — b) extrapolation de 22 ans pour 9 ans observés : abusive.

Correction de l'exercice 8 – Deux variables candidates

a) On retient la **surface** : son nuage est presque aligné, et la somme des carrés des écarts est près de trente fois plus petite.

$$\frac{420}{15} = 28$$

Les prévisions faites à partir de la surface seront beaucoup plus précises.

b) Un nuage dispersé signifie qu'il n'y a pas de relation affine nette entre le nombre de vendeurs et les ventes. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a aucun lien : il peut exister sous une autre forme, ou être masqué par d'autres facteurs (emplacement, surface).

Réponse. a) la surface — b) pas de relation affine nette avec le nombre de vendeurs.

Correction de l'exercice 9 – Décider d'un agrandissement

50 m² de plus correspondent à un chiffre d'affaires supplémentaire de $2{,}33 \times 50 = 116{,}5$ k€ par an, soit une marge supplémentaire de $0{,}18 \times 116{,}5 = 20{,}97$ k€ par an.

Sur deux ans : $2 \times 20{,}97 = 41{,}94$ k€, bien moins que les 90 k€ investis. Il faudrait

$$\frac{90}{20{,}97} \approx 4{,}3 \text{ ans}$$

pour amortir l'investissement : il n'est pas rentabilisé en deux ans, mais peut l'être à plus long terme.

Réponse. Non : ≈ 41,94 k€ de marge en deux ans contre 90 k€ ; il faut environ 4,3 ans.

Correction de l'exercice 10 – Repérer une erreur

Première erreur : $x = 0$ est hors de la plage observée. La valeur 55,2 est une extrapolation, pas une mesure des ventes sans publicité.

Deuxième erreur : $x = 100$ est près de trois fois le plus gros budget observé :

$$3{,}08 \times 100 + 55{,}2 = 363{,}2$$

est une extrapolation lointaine ; l'effet de la publicité s'essouffle souvent quand le budget augmente.

Troisième erreur : un bon ajustement ne prouve pas que la publicité **cause** les ventes ; les deux peuvent augmenter ensemble pour une autre raison (saison, période de soldes).

Réponse. Deux extrapolations hors du domaine observé et une causalité affirmée sans preuve.

Correction de l'exercice 11 – Comparer deux magasins

On compare chaque chiffre d'affaires à celui que prévoit le modèle pour sa surface.

$$\text{A} : 2{,}33 \times 150 + 2{,}83 \approx 352{,}3 \qquad \text{B} : 2{,}33 \times 200 + 2{,}83 \approx 468{,}8$$

Le magasin A est exactement dans la moyenne de l'enseigne (résidu presque nul). Le magasin B est environ 24 k€ en dessous de ce qu'on attend d'un magasin de sa taille.

Bien que B réalise un chiffre d'affaires plus élevé, c'est A le plus performant au regard de sa surface.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. A : conforme au modèle ; B : ≈ 24 k€ en dessous. A est le plus performant.

Correction de l’exercice 12 – Une baisse de prix à évaluer

a) À 18 € : $q = 344$ ventes et une marge de $(18 - 8) \times 344 = 3440$ €.

À 16 € : $q = 389$ ventes et une marge de

$$(16 - 8) \times 389 = 3112 \text{ €}$$

b) La baisse de prix fait vendre 45 articles de plus, mais la marge par article passe de 10 à 8 € : la marge totale baisse de 328 €. Il ne faut pas baisser le prix, sauf objectif de conquête de parts de marché.

Réponse. a) 3440 € contre 3112 € — b) ne pas baisser le prix.

Correction de l’exercice 13 – Fixer un objectif réaliste

a) On résout :

$$3{,}08x + 55{,}2 = 250 \Leftrightarrow x = \frac{194{,}8}{3{,}08} \approx 63{,}25$$

soit un budget d’environ 63 k€.

b) Ce budget est presque le double du plus gros budget observé (35 k€) : c’est une extrapolation lointaine. Rien ne garantit que chaque k€ continue de rapporter 3,08 ventes. Il vaut mieux fixer un objectif intermédiaire et tester l’effet d’un budget de 40 ou 45 k€.

Réponse. a) ≈ 63,25 k€ — b) non : extrapolation bien au-delà du domaine observé.

Correction de l’exercice 14 – Trois décisions à trancher

a) +5 k€ de budget donnent $3{,}08 \times 5 = 15{,}4$ ventes de plus, soit $15{,}4 \times 400 = 6160$ € de marge, pour 5000 € de dépense : bilan de +1160 €.

b) Le modèle étant affine, le calcul est identique : +1160 €.

c) Chaque k€ de publicité rapporte $3{,}08 \times 400 = 1232$ € de marge. L’investissement est rentable tant que

$$a \times m > 1000$$

où a est la pente et m la marge par vente. Ici $1232 > 1000$: augmenter le budget est rentable, dans la plage où le modèle est valable.

Réponse. a) et b) oui, +1160 € — c) rentable tant que $a \times m > 1000$ (ici 1232).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : un rapport complet

a) $G(22{,}5\,;\,124{,}5)$, et $3{,}08 \times 22{,}5 + 55{,}2 = 124{,}5$: la droite passe par G. Les résidus valent

$$-1 \quad 0{,}6 \quad 1{,}2 \quad -1{,}2 \quad 1{,}4 \quad -1$$

petits et de signes alternés : l’ajustement est de très bonne qualité.

b) Pour 40 k€ : $y \approx 178{,}4$ ventes. Passer de 35 à 40 k€ rapporte $15{,}4 \times 400 = 6160$ € pour 5000 € de dépense, soit +1160 €.

c) Recommandation : porter le budget à 40 k€, gain attendu d’environ 1160 €, en mesurant l’effet réel ; ne pas aller plus loin sans nouvelles données, car on sortirait du domaine observé.

Réponse. a) résidus faibles, très bon ajustement — b) ≈ 178 ventes, bilan +1160 € — c) passer à 40 k€ et mesurer l’effet.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).