Plaquette 3 – Droite d'ajustement et prévisions

Statistiques à deux variables — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = ax + b$; elle passe par le point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$.

Prévision directe. On remplace x par sa valeur (attention au rang : x = année − année de départ).

Prévision inverse. On résout $ax + b = y_0$, ou une inéquation $ax + b > y_0$ (en changeant le sens si $a < 0$).

Résidu d'un point : $e_i = y_i - (ax_i + b)$, l'écart entre la valeur observée et la valeur donnée par la droite.

Moindres carrés. La droite des moindres carrés est celle qui rend minimale

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$$

Prudence. Interpolation (dans la plage observée) : fiable. Extrapolation : d'autant plus risquée qu'on s'éloigne des données.

Correction de l'exercice 1 – Écrire l'équation

a) La droite d'ajustement a pour équation

$$y = 16{,}97x + 250{,}24$$

b) Le coefficient directeur $a = 16{,}97$ indique qu'en moyenne, le chiffre d'affaires augmente d'environ 16,97 milliers d'euros par an.

L'ordonnée à l'origine $b = 250{,}24$ est la valeur donnée par la droite pour $x = 0$, c'est-à-dire en 2019 : elle est proche de la valeur observée cette année-là (250).

Réponse. a) $y = 16{,}97x + 250{,}24$ — b) +16,97 milliers d'euros par an ; 250,24 en 2019.

Correction de l'exercice 2 – Une prévision directe

L'année 2027 correspond au rang $x = 2027 - 2019 = 8$. On remplace :

$$y = 16{,}97 \times 8 + 250{,}24 = 135{,}76 + 250{,}24 = 386$$

La droite prévoit un chiffre d'affaires de 386 milliers d'euros en 2027.

C'est une extrapolation de trois ans au-delà du dernier relevé (2024) : elle suppose que la tendance se maintient.

Réponse. $x = 8$ donne $y = 386$ milliers d'euros.

Correction de l'exercice 3 – Une prévision inverse

On résout l'inéquation, avec $16{,}97 > 0$:

$$16{,}97x + 250{,}24 > 400 \Leftrightarrow x > \frac{400 - 250{,}24}{16{,}97} \approx 8{,}82$$

Le rang est entier : le plus petit qui convient est $x = 9$, soit l'année $2019 + 9 = 2028$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : au rang 8, la droite donne 386 ; au rang 9, environ 402,97.

Réponse. En 2028 ($x = 9$).

Correction de l'exercice 4 – Un ajustement décroissant

a) Le coefficient $-1{,}37$ est négatif : chaque euro de plus sur le prix fait baisser les ventes d'environ 1,37 unité.

b) $y = -1{,}37 \times 60 + 193{,}1 = -82{,}2 + 193{,}1 = 110{,}9$.

c) On résout :

$$-1{,}37x + 193{,}1 = 100 \Leftrightarrow x = \frac{193{,}1 - 100}{1{,}37} \approx 67{,}96$$

Les ventes tombent à 100 pour un prix d'environ 68 €. Ces deux prévisions sont des extrapolations si les prix observés allaient de 10 à 50 €.

Réponse. a) $-1{,}37$ vente par euro — b) 110,9 — c) $x \approx 67{,}96$ €.

Correction de l'exercice 5 – Calculer des résidus

On calcule la valeur de la droite, puis le résidu $e_i = y_i - (16{,}97x_i + 250{,}24)$:

x_i	0	1	2	3	4	5
Droite	250,24	267,21	284,18	301,15	318,12	335,09
Résidu	−0,24	0,79	0,82	−2,15	−0,12	0,91

Les résidus sont petits (au plus 2,15, pour des valeurs autour de 300), de signes mêlés et sans tendance :

$$|e_i| \leq 2{,}15$$

L'ajustement affine décrit bien la série.

Réponse. Résidus $-0{,}24$; 0,79 ; 0,82 ; $-2{,}15$; $-0{,}12$; 0,91 : petits et sans tendance.

Correction de l'exercice 6 – Changer d'unité

a) Passer en euros multiplie toutes les valeurs de y par 1000, donc les deux coefficients :

$$y = 16\,970x + 250\,240$$

b) Si m désigne le nombre de mois, $x = \frac{m}{12}$ et

$$y = 16{,}97 \times \frac{m}{12} + 250{,}24 \approx 1{,}414m + 250{,}24$$

La pente devient une hausse **mensuelle** : $16{,}97 \div 12 \approx 1{,}414$ millier d'euros par mois.

Réponse. a) $y = 16\,970x + 250\,240$ — b) $y \approx 1{,}414m + 250{,}24$.

Correction de l'exercice 7 – Deux ajustements à comparer

a) En 2020 ($x = 0$) : A vaut 31,5 et B 12,3. En 2024 ($x = 4$) : A vaut 48,3 et B 43,5. A reste devant, mais l'écart se réduit.

b) On résout :

$$7{,}8x + 12{,}3 > 4{,}2x + 31{,}5 \Leftrightarrow 3{,}6x > 19{,}2 \Leftrightarrow x > 5{,}33$$

Le premier rang entier est $x = 6$: B dépasse A en 2026. Contrôle : en 2026, A vaut 56,7 et B 59,1.

Réponse. a) A devant dans les deux cas — b) en 2026.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Atteindre un objectif

a) On résout $4{,}2x + 31{,}5 \geq 60$:

$$x \geq \frac{60 - 31{,}5}{4{,}2} \approx 6{,}79$$

Le premier rang entier est $x = 7$: l’objectif est atteint en 2027.

b) Il faut $6a + 31{,}5 = 60$ pour $x = 6$ (année 2026), soit $a = \dfrac{28{,}5}{6} = 4{,}75$.

La croissance devrait passer de 4,2 à 4,75 millions par an.

Réponse. a) en 2027 — b) une pente de 4,75 au lieu de 4,2.

Correction de l’exercice 9 – Prévoir ou pas ?

On calcule les rangs puis les valeurs.

a) 2020 : $x = 5$, $y = 57{,}5$. C’est une interpolation (dans la plage observée) : fiable.
b) 2025 : $x = 10$, $y = 75$. Extrapolation de deux ans : acceptable avec prudence.
c) 2050 : $x = 35$, on obtiendrait

$$y = 3{,}5 \times 35 + 40 = 162{,}5$$

mais c’est une extrapolation de 27 ans au-delà des données, sur une période trois fois plus longue que celle observée : cette valeur n’a pas de sens prévisionnel.

Réponse. a) 57,5, fiable — b) 75, acceptable — c) 162,5, à écarter.

Correction de l’exercice 10 – Repérer une erreur

L’élève a remplacé x par l’**année** au lieu du **rang**. Or $x = 0$ correspond à 2019 : en 2030, le rang est $x = 2030 - 2019 = 11$.

$$y = 16{,}97 \times 11 + 250{,}24 = 186{,}67 + 250{,}24 = 436{,}91$$

Son calcul donnait environ 34 699, un résultat absurde qui aurait dû l’alerter.

Réponse. $x = 11$, d’où $y \approx 436{,}91$.

Correction de l’exercice 11 – Comparer deux droites par les carrés des écarts

a) D_2 donne 250 ; 267 ; 284 ; 301 ; 318 ; 335. Les écarts sont 0 ; 1 ; 1 ; −2 ; 0 ; 1, donc

$$S_2 = 0 + 1 + 1 + 4 + 0 + 1 = 7$$

b) $S_1 \approx 6{,}82 < 7 = S_2$: la droite des moindres carrés fait mieux, comme prévu par sa définition (elle minimise S).

L’écart est très faible : la droite arrondie $y = 17x + 250$, plus simple à manier, donne des prévisions presque identiques.

Réponse. a) $S_2 = 7$ — b) $S_1 \approx 6{,}82 < S_2$: la droite des moindres carrés est la meilleure, de peu.

Correction de l’exercice 12 – Prévision et écart observé

a) Le résidu est $46{,}1 - 48{,}3 = -2{,}2$: l’observation est en dessous de la prévision.

b) L’écart relatif vaut

$$\frac{2{,}2}{48{,}3} \approx 0{,}0455, \text{ soit environ } 4{,}55\,\%$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Un seul écart de cette taille ne suffit pas à rejeter le modèle. En revanche, si les résidus suivants sont aussi négatifs et de plus en plus grands, la tendance a changé et il faudra refaire l'ajustement avec les nouvelles données.

Réponse. a) $-2{,}2$ — b) $\approx 4{,}55\,\%$ — c) pas sur un seul écart ; surveiller les suivants.

Correction de l'exercice 13 – Remonter à une date

a) 2024 correspond à $x = 14$: $y = -1{,}37 \times 14 + 193{,}1 = 173{,}92$ TWh.

b) On résout, en changeant le sens car on divise par $-1{,}37 < 0$:

$$-1{,}37x + 193{,}1 < 150 \Leftrightarrow x > \frac{193{,}1 - 150}{1{,}37} \approx 31{,}46$$

Le premier rang entier est 32, soit 2042. C'est une extrapolation lointaine : la baisse linéaire pourrait ralentir ou s'accélérer d'ici là, la réponse est à prendre sous fortes réserves.

Réponse. a) $\approx 173{,}92$ TWh — b) en 2042, sous fortes réserves.

Correction de l'exercice 14 – Décider avec un ajustement

« Avant 2027 » signifie au plus tard en 2026, soit $x = 6$:

$$y = 4{,}2 \times 6 + 31{,}5 = 25{,}2 + 31{,}5 = 56{,}7$$

Le modèle prévoit 56,7 millions en 2026, au-delà du seuil de 55 millions : la condition est remplie.

La marge est faible (1,7 million, soit environ 3 %) et repose sur une extrapolation : la décision est favorable, mais il serait prudent de suivre les ventes réelles chaque année.

Réponse. Oui : 56,7 millions prévus en 2026, au-delà de 55.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une étude complète

a) $\overline{x} = 2{,}5$ et $\overline{y} = \dfrac{1756}{6} \approx 292{,}67$. Or $16{,}97 \times 2{,}5 + 250{,}24 = 292{,}665$: la droite passe bien par G, à l'arrondi près.

b) Les écarts successifs (18, 17, 14, 19, 18) sont réguliers et les résidus restent inférieurs à 2,2 : le nuage est presque aligné, l'ajustement est pertinent.

c) 2026 : $x = 7$, $y = 16{,}97 \times 7 + 250{,}24 \approx 369{,}03$. Pour dépasser 400, il faut

$$x > \frac{400 - 250{,}24}{16{,}97} \approx 8{,}82$$

soit $x = 9$: en 2028.

Réponse. a) oui — b) oui, nuage presque aligné — c) $\approx 369{,}03$; en 2028.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).