Plaquette 4 – Changement de variable

Statistiques à deux variables — Terminale STMG

Exercices

Méthode

Quand le nuage est **incurvé**, l'ajustement affine direct est mauvais. On le redresse par un **changement de variable donné** ($z = x^2$, $z = \frac{1}{x}$, $z = \sqrt{x}$ ou $z = \log(y)$…) : si les nouveaux points sont alignés, on ajuste, puis on revient à la variable de départ pour prévoir.

Exercice 1 – Repérer une courbure

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	11	25	45	71

a) Calculer les écarts successifs.

b) Un ajustement affine convient-il ? Que proposer ?

Exercice 2 – Un changement de variable en x²

Avec la série précédente, on pose $z = x^2$.

a) Donner les z_i.

b) La droite des moindres carrés de y en fonction de z est $y \approx 2{,}84z - 0{,}24$. Exprimer y en fonction de x.

c) Prévoir y pour $x = 6$.

Exercice 3 – Un changement de variable en 1/x

x_i	1	2	4	5	10
y_i	62	34	20	17	11

a) Décrire l'allure du nuage.

b) On pose $z = \frac{1}{x}$. Calculer les z_i. La droite des moindres carrés est $y \approx 56{,}44z + 5{,}66$. Exprimer y en fonction de x.

c) Prévoir y pour $x = 20$.

Exercice 4 – Un changement de variable en racine

x_i	1	4	9	16	25
y_i	12	21	29	41	50

On pose $z = \sqrt{x}$, et la droite des moindres carrés de y en fonction de z est $y = 9{,}6z + 1{,}8$.

a) Donner les z_i.

b) Exprimer y en fonction de x et prévoir y pour $x = 36$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Choisir le bon changement

Pour chaque description de nuage, proposer un changement de variable adapté.

a) Le nuage descend vite puis s'aplatit vers une valeur positive.

b) Le nuage monte de plus en plus vite, avec des écarts qui augmentent d'une quantité constante.

c) Le nuage monte de moins en moins vite.

d) Les valeurs sont multipliées à peu près par le même nombre à chaque étape.

Exercice 6 – Redresser une croissance exponentielle

Les ventes d'un produit, en milliers, ont évolué ainsi (x = rang de l'année) :

x_i	0	1	2	3	4
y_i	500	560	627	702	787

a) Calculer les quotients successifs. Que constate-t-on ?

b) Calculer $z_i = \log(y_i)$ à 10^{-4} près et montrer que les points $(x_i ; z_i)$ sont presque alignés.

Exercice 7 – Revenir à la variable de départ

Pour la série précédente, la droite des moindres carrés de $z = \log(y)$ en fonction de x est $z = 0{,}0492x + 2{,}699$.

a) Exprimer y en fonction de x sous la forme $y = k \times q^x$.

b) Prévoir les ventes au rang 6.

Exercice 8 – Un ajustement donné en logarithme

Une étude donne, après le changement de variable $z = \log(N)$, l'ajustement $z = 0{,}03x + 3{,}2$, où N est le nombre d'abonnés et x le rang du mois.

a) Exprimer N en fonction de x.

b) Quel est le taux d'évolution mensuel ?

c) Prévoir N au rang 10.

Exercice 9 – Un coût moyen par changement de variable

Le coût moyen c (en euros) d'un article dépend de la quantité produite n :

n	10	20	30	50	100
c	80,5	49,8	40,2	32,1	26,0

On pose $z = \dfrac{1}{n}$; la droite des moindres carrés de c en fonction de z est $c \approx 604{,}6z + 19{,}9$.

a) Exprimer c en fonction de n et interpréter les deux coefficients.

b) Estimer le coût moyen pour 200 articles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – La distance de freinage

On mesure la distance de freinage d (en m) d'une voiture selon sa vitesse v (en km/h) :

v	30	50	70	90	110
d	5,9	16,2	31,8	52,7	78,6

a) Pourquoi un ajustement affine de d en fonction de v est-il mauvais ?

b) On pose $u = v^2$; la droite des moindres carrés est $d \approx 0{,}0065u$. Prévoir d pour $v = 130$ km/h.

Exercice 11 – Vérifier un alignement exact

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	5	10	17	26

On pose $z = x^2$. Montrer que les points $(z_i\,;y_i)$ sont exactement alignés et donner la relation entre y et x.

Exercice 12 – Repérer une erreur

Avec l'ajustement $\log(y) = 0{,}0492x + 2{,}699$, un élève prévoit les ventes au rang 8 et écrit : « $y = 0{,}0492 \times 8 + 2{,}699 \approx 3{,}09$ milliers ». Corriger.

Exercice 13 – Calculer les logarithmes avec Python

On veut calculer automatiquement les valeurs $z_i = \log(y_i)$ d'une série.

```
from math import log10

Y = [500, 560, 627, 702, 787]
Z = []
for y in Y:
    Z.append(round(log10(y), 4))
print(Z)
```

a) Que contient la liste Z à la fin ?

b) Compléter le programme pour afficher les écarts successifs des valeurs de Z.

Exercice 14 – Un seuil avec un modèle exponentiel

On a obtenu, par changement de variable, le modèle $y \approx 500 \times 1{,}12^x$ (ventes en milliers, x rang de l'année). À partir de quel rang les ventes dépasseront-elles 1500 milliers ?

Exercice 15 – Synthèse : des téléchargements

Le nombre de téléchargements d'une application a évolué ainsi (x = rang du trimestre) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	2000	2600	3380	4394	5712	7426

a) Montrer qu'un ajustement affine direct n'est pas adapté.

b) On pose $z = \log(y)$; la droite des moindres carrés est $z \approx 0{,}1139x + 3{,}301$. En déduire y en fonction de x.

c) Prévoir les téléchargements au rang 7 et le premier rang où l'on dépasse 20 000.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).