MATHÉMATIQUES

Statistiques à deux variables

Terminale STMG

Nuage de points • Point moyen • Moindres carrés • Changement de variable $\log y$ • $\frac{1}{x}$ • Ajustement exponentiel • Interpolation • Extrapolation

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027), partie « Statistique et probabilités », section « Séries statistiques à deux variables quantitatives ». Il couvre :

- rappels de première : nuage, point moyen, ajustement affine (au jugé, Mayer, moindres carrés), interpolation et extrapolation ;
- changement de variable donné ($u = t^2$, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\log y$…) pour conjecturer une relation affine entre les nouvelles variables ;
- ajustement se ramenant à un ajustement affine ;
- **algorithmes** : calcul automatique de $\sum(y_i - (ax_i + b))^2$ et recherche d'un couple $(a\,;b)$ qui la minimise.

Objectif : ajuster un nuage de points, directement ou après un changement de variable, et utiliser l'ajustement obtenu pour estimer des valeurs avec esprit critique.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Rappels : ajustement affine **3**

2 Changement de variable **3**

3 Algorithmes **4**

4 Erreurs classiques **5**

5 Fiche de synthèse **5**

6 Exercices d'application **5**

7 Corrigés des exercices **5**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Rappels : ajustement affine

Ce que l'on sait

— Le point moyen d'un nuage $(x_i\,;y_i)$ est $G(\bar{x}\,;\bar{y})$.

— La droite des **moindres carrés** $y=ax+b$ rend minimale la somme $S=\sum\big(y_i-(ax_i+b)\big)^2$; la calculatrice ou le tableur en donnent a et b, et elle passe par G.

— On l'utilise pour interpoler (dans la plage des données) ou extrapoler (en dehors, avec prudence).

2. Changement de variable

Principe

Quand le nuage $(x_i\,;y_i)$ est **courbe**, on transforme l'une des variables (par exemple $z=\log y$ ou $u=\frac{1}{x}$) ; si le nouveau nuage est allongé autour d'une droite, on l'ajuste par une droite, puis on **revient** aux variables d'origine.

Une croissance exponentielle : $z=\log y$

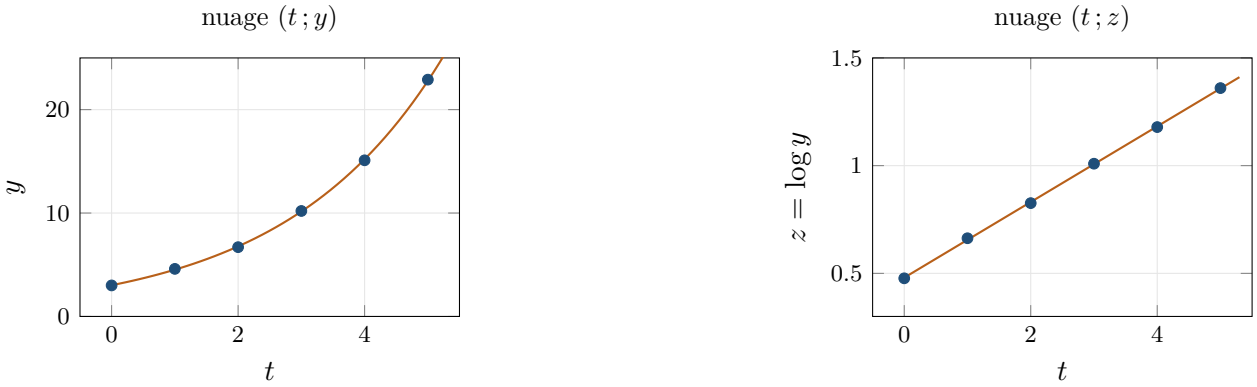
Nombre y d'utilisateurs (en milliers) d'un service en ligne en fonction du temps t (en mois) :

t_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3,0	4,6	6,7	10,2	15,1	22,9
$z_i=\log y_i$	0,477	0,663	0,826	1,009	1,179	1,360

Le nuage $(t_i\,;z_i)$ est presque aligné. Les moindres carrés donnent $z\approx 0{,}176t+0{,}480$. On revient à y :

$$y=10^z\approx 10^{0{,}480}\times\left(10^{0{,}176}\right)^t\approx 3{,}02\times 1{,}50^t.$$

Le nombre d'utilisateurs est multiplié par environ 1,5 chaque mois. Estimation pour $t=7$: $y\approx 51$ milliers (extrapolation, à prendre avec prudence).



À gauche le nuage courbe ; à droite, après le changement de variable $z=\log y$, des points alignés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Coût unitaire : $u = \frac{1}{V}$

Coût de fabrication unitaire P (en euros) en fonction du volume produit V (en milliers d'unités) :

V_i	1	2	3	4	5
P_i	6,0	3,1	2,0	1,5	1,2
$u_i = \frac{1}{V_i}$	1	0,5	0,333	0,25	0,2

Les points $(u_i\,;P_i)$ sont alignés : les moindres carrés donnent $P \approx 6{,}01u + 0{,}02$, soit $P \approx \dfrac{6}{V}$: le coût fixe d'environ 6 000 € est réparti sur la production. Pour $V = 2{,}5$ milliers d'unités : $P \approx 2{,}4$ €.

Quel changement de variable ?

Il est donné par l'énoncé ou suggéré par la physique de la situation : $\log y$ pour une évolution relative constante, $\frac{1}{x}$ pour une grandeur inversement proportionnelle (coût unitaire), x^2 pour une distance de freinage, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour une dispersion d'échantillons…

3. Algorithmes

Calculer la somme des carrés des écarts

```
def S(a, b, X, Y):
    s = 0
    for i in range(len(X)):
        s = s + (Y[i] - (a * X[i] + b))**2
    return s
```

Chercher un bon couple par balayage

```
def balayage(X, Y):
    meilleur = (0, 0, S(0, 0, X, Y))
    for i in range(0, 101):          # a de 0 à 10 par pas de 0,1
        for j in range(-100, 101):   # b de -10 à 10 par pas de 0,1
            a, b = i / 10, j / 10
            s = S(a, b, X, Y)
            if s < meilleur[2]:
                meilleur = (a, b, s)
    return meilleur
```

Le couple trouvé est proche de celui des moindres carrés, à la précision du pas près.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Erreurs classiques

À éviter

- Ajuster par une droite un nuage manifestement courbe.
- Oublier de revenir aux variables d'origine après le changement de variable.
- Écrire $10^{at+b} = 10^{at} + 10^{b}$ au lieu de $10^{b} \times (10^{a})^{t}$.
- Extrapoler loin des données comme si le modèle restait valable.

5. Fiche de synthèse

Moindres carrés	minimise $\sum(y_i - ax_i - b)^2$; passe par $G(\bar{x}\,;\bar{y})$
Changement de variable	transformer, ajuster par une droite, revenir aux variables d'origine
$z = \log y$	$z = at + b$ donne $y = 10^{b} \times (10^{a})^{t}$
$u = \frac{1}{x}$	$y = au + b$ donne $y = \frac{a}{x} + b$
Prudence	interpoler plutôt qu'extrapoler

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Revenir à la variable

Après le changement de variable $z = \log y$, on obtient l'ajustement $z = 0{,}1t + 2$. Exprimer y en fonction de t et calculer y pour $t = 3$.

Exercice 2 – Distance de freinage

Pour des vitesses v (en km/h) et des distances de freinage d (en m), on pose $u = v^2$ et l'on obtient l'ajustement $d \approx 0{,}006\,u$. Estimer la distance de freinage à 90 km/h, puis à 130 km/h.

Exercice 3 – Inverse

On pose $u = \frac{1}{x}$ et l'on obtient $y = 12u + 1$. Exprimer y en fonction de x et calculer y pour $x = 4$.

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $y = 10^{0{,}1t+2} = 100 \times \left(10^{0{,}1}\right)^{t} \approx 100 \times 1{,}259^{t}$. Pour $t = 3$: $y = 10^{2{,}3} \approx 199{,}5$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. À 90 km/h : $d \approx 0{,}006 \times 8\,100 = 48{,}6$ m. À 130 km/h : $d \approx 0{,}006 \times 16\,900 = 101{,}4$ m (plus du double).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $y = \dfrac{12}{x} + 1$; pour $x = 4$: $y = 3 + 1 = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).