

Plaquette 5 – Modèles mixtes et gestion

Suites numériques et modèles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le modèle mixte.

$$u_{n+1} = a u_n + b$$

Situation	Traduction
-15 % puis +900 nouveaux	$u_{n+1} = 0,85u_n + 900$
+2,5 % puis versement de 2000	$u_{n+1} = 1,025u_n + 2000$
+0,4 % puis remboursement de 850	$u_{n+1} = 1,004u_n - 850$

△ Elle n'est **ni** arithmétique **ni** géométrique : ni les différences ni les quotients ne sont constants.

Le point d'équilibre. C'est la valeur x qui se reproduit :

$$x = ax + b \iff x = \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

Comportement quand $0 < a < 1$.

Position de u_0	Suite
$u_0 > x$	décroissante, elle tend vers x
$u_0 < x$	croissante, elle tend vers x
$u_0 = x$	constante

Comportement quand $a > 1$. La suite **s'éloigne** de l'équilibre : elle explose si $u_0 > x$, elle s'effondre si $u_0 < x$.

En pratique. Pas de formule du terme général au programme : on utilise le tableur ou une boucle.

$$= B2 \times a + b \quad \text{recopié vers le bas}$$

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître un modèle mixte

a) **Pertes** : coefficient 0,85 ✓

— **Apports** : +900 ✓

— **Relation** :

$$u_{n+1} = 0,85 u_n + 900$$

— **Nature** : mixte ✓

b) **Intérêts** : coefficient 1,025 ✓

— **Versement** : +2000 ✓

— **Relation** :

$$u_{n+1} = 1,025 u_n + 2000$$

c) **Baisse** : coefficient 0,8 ✓

— **Réapprovisionnement** : +240 ✓

— **Relation** :

$$s_{n+1} = 0,8 s_n + 240$$

— **Point commun aux trois** : un pourcentage **et** un montant fixe ✓

— **Vérification qu'elles ne sont pas arithmétiques** ✓

— **Test sur c) avec** $s_0 = 2000$: $s_1 = 1840$ ✓

— **Puis** : $s_2 = 1712$ ✓

— **Différences** : -160 puis -128 ✓

— **Elles diffèrent** ✓

— **Vérification qu'elles ne sont pas géométriques** ✓

— **Quotients** : 0,92 puis $\approx 0,93$ ✓

— **Ils diffèrent** ✓

— **Conclusion** : ni l'une ni l'autre ✓

Réponse. a) $u_{n+1} = 0,85u_n + 900$ · b) $u_{n+1} = 1,025u_n + 2000$ · c) $s_{n+1} = 0,8s_n + 240$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer les premiers termes

— **Calcul de** u_1 : $0,85 \times 4000 + 900$ ✓

— **Produit** : 3400 ✓

— **Somme** :

$$u_1 = 4300$$

— **Calcul de** u_2 : $0,85 \times 4300 + 900$ ✓

— **Produit** : 3655 ✓

— **Somme** :

$$u_2 = 4555$$

— **Calcul de** u_3 : $0,85 \times 4555 + 900$ ✓

— **Produit** : $\approx 3871,75$ ✓

— **Somme** :

$$u_3 = 4771,75$$

— **Observation** : la suite **croît** ✓

— **Différences** : 300 ; 255 ; 216,75 ✓

— **Elles diminuent** ✓

— **Quotient des différences** : 0,85 ✓

— **Interprétation** : la croissance ralentit ✓

— **Termes suivants** : $\approx 4955,99$ ✓

— **Puis** : $\approx 5112,59$ ✓

— **Puis** : $\approx 5245,70$ ✓

— **Hypothèse** : la suite plafonne ✓

Réponse. $u_1 = 4300$, $u_2 = 4555$, $u_3 = 4771,75$.

Correction de l'exercice 3 - Le point d'équilibre

a) **Équation** : $x = 0,85x + 900$ ✓

— **On retranche** $0,85x$: $0,15x = 900$ ✓

— **Division** : $x = \frac{900}{0,15}$ ✓

— **Valeur :**

$$x = 6000$$

b) **Test :** si $u_n = 6000$ ✓

— **Calcul :** $0,85 \times 6000 + 900$ ✓

— **Produit :** 5100 ✓

— **Somme :** 6000 ✓

— **Conclusion :** la valeur se reproduit ✓

c) **Position de u_0 :** $4000 < 6000$ ✓

— **Conséquence :** la suite **croît** vers 6000 ✓

— **Sans jamais l'atteindre** ✓

— **Contrôle au rang 8 :** $\approx 5455,02$ ✓

— **Interprétation commerciale :** les 900 nouveaux clients compensent 15 % de pertes ✓

— **Équilibre atteint quand :** $0,15 \times 6000 = 900$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Cas d'un départ à 8000 :** $u_1 = 7700$ ✓

— **Puis :** 7445 ; $\approx 7228,25$ ✓

— **La suite décroît**** vers 6000 ✓

— **Conclusion générale :** l'équilibre attire des deux côtés ✓

— **Raison :** le coefficient 0,85 est compris entre 0 et 1 ✓

Réponse. a) $x = 6000$ · b) $0,85 \times 6000 + 900 = 6000$ · c) la base tend vers 6000 clients.

Correction de l'exercice 4 - Un seuil sur un modèle mixte

— **Méthode :** calcul de proche en proche ✓

— **Raison :** pas de formule du terme général ✓

— **Rang 1 :** 4300 ✓

— **Rang 2 :** 4555 ✓

— **Rang 3 :** 4771,75 ✓

— **Rang 4 :** $\approx 4955,99$ ✓

— **Rang 5 :** $\approx 5112,59$ ✓

— **Rang 6 :** $\approx 5245,70$ ✓

— **Rang 7 :** $\approx 5358,85$ ✓

— **Rang 8 :** $\approx 5455,02$ ✓

— **Encore sous 5500** ✓

— **Rang 9 :** $\approx 5536,77$ ✓

— **Seuil franchi** ✓

— **Réponse :**

9 ans

— **Algorithme correspondant :**

```
def seuil():
    u = 4000
    n = 0
    while u < 5500:
        u = u * 0.85 + 900
        n = n + 1
    return n
```

- **Valeur renvoyée** : 9 ✓
- **Objectif 6000** : jamais atteint ✓
- **Raison** : c'est le point d'équilibre ✓
- **Danger** : une boucle infinie si on le vise ✓

Réponse. 9 ans, avec $u_9 \approx 5537$ clients.

Correction de l'exercice 5 - Un stock à piloter

a) **Calcul de s_1** : $0,8 \times 2000 + 240$ ✓

- **Produit** : 1600 ✓
- **Valeur** :

$$s_1 = 1840$$

- **Calcul de s_2** : $0,8 \times 1840 + 240$ ✓
- **Produit** : 1472 ✓
- **Valeur** : $s_2 = 1712$ ✓
- **Calcul de s_3** : $0,8 \times 1712 + 240$ ✓
- **Produit** : 1369,6 ✓
- **Valeur** :

$$s_3 = 1609,60$$

b) **Équation** : $x = 0,8x + 240$ ✓

- **On retranche** : $0,2x = 240$ ✓
- **Division** : $x = \frac{240}{0,2}$ ✓
- **Valeur** :

$$x = 1200 \text{ unités}$$

- **Position de s_0** : $2000 > 1200$ ✓
- **Conséquence** : le stock **décroît** vers 1200 ✓
- **Contrôle au rang 6** : $\approx 1409,72$ ✓
- **Interprétation** : à 1200, les 240 réapprovisionnés compensent la perte ✓
- **Vérification** : $0,2 \times 1200 = 240$ ✓
- **Pour viser 1500 d'équilibre** : $0,2 \times 1500$ ✓
- **Réapprovisionnement nécessaire** : 300 unités ✓
- **Pour viser 2000** : 400 unités ✓

Réponse. a) 1840 ; 1712 ; 1609,60 · b) 1200 unités.

Correction de l'exercice 6 - Un emprunt à mensualités

a) **Calcul de d_1** : $1,004 \times 40\,000 - 850$ ✓

- **Produit** : 40 160 ✓
- **Valeur** :

$$d_1 = 39\,310 \text{ €}$$

- **Calcul de d_2** : $1,004 \times 39\,310 - 850$ ✓
- **Produit** : $\approx 39\,467,24$ ✓
- **Valeur** :

$$d_2 \approx 38\,617,24 \text{ €}$$

- **Observation** : la dette baisse ✓
- **Intérêts du premier mois** : 160 € ✓
- **Part du remboursement** : 690 € ✓

b) **Équation** : $x = 1,004x - 850$ ✓

- **On retranche x** : $0 = 0,004x - 850$ ✓
- **Isolement** : $0,004x = 850$ ✓
- **Division** : $x = \frac{850}{0,004}$ ✓
- **Valeur** :

$$x = 212\,500 \text{ €}$$

- **Interprétation** : à ce niveau de dette, la mensualité ne paierait que les intérêts ✓
- **Ici** : $40\,000 < 212\,500$ ✓
- **Coefficient $a = 1,004 > 1$** : la suite s'éloigne de l'équilibre ✓
- **Sens** : vers le bas, puisqu'on part en dessous ✓
- **Conclusion** : la dette s'éteint ✓
- **Mensualité minimale pour rembourser** : plus de 160 € ✓

Réponse. a) 39 310 € et $\approx 38\,617,24$ € · b) 212 500 € : au-delà, la mensualité ne couvrirait que les intérêts.

Correction de l'exercice 7 - Durée d'un emprunt

- **Condition** : tant que la dette reste positive ✓
- **Algorithme** :

```
def duree():
    d = 40000
    n = 0
    while d > 0:
        d = d * 1.004 - 850
        n = n + 1
    return n
```

- **Valeur renvoyée** : 53 ✓
- **Contrôle au rang 52** : $\approx 203,83$ € ✓
- **Encore positive** ✓
- **Contrôle au rang 53** : $\approx -645,36$ € ✓
- **La dette est soldée** ✓
- **Durée** :

53 mois

- **Soit** : 4 ans et 5 mois ✓
- **Coût total brut** : 53×850 ✓
- **Valeur** : 45 050 € ✓
- **Remarque** : la dernière mensualité est réduite ✓
- **Montant réel de la dernière** : $\approx 204,65$ € ✓
- **Coût total corrigé** : $\approx 44\,404,64$ € ✓
- **Intérêts payés** : $\approx 4404,64$ € ✓
- **En pourcentage de l'emprunt** : $\approx 11\%$ ✓
- **Effet d'une mensualité de 1000 €** : durée plus courte ✓
- **Effet d'une mensualité de 200 €** : jamais remboursé ✓

— **Raison** : $200 < 160$ est faux, mais la marge est trop mince ✓

Réponse. 53 mensualités, pour un coût total d'environ 44 405 € (soit ≈ 4405 € d'intérêts).

Correction de l'exercice 8 - Une épargne avec versements

a) **Calcul de u_1** : $1,025 \times 5000 + 2000$ ✓

— **Produit** : 5125 ✓

— **Valeur** :

$$u_1 = 7125 \text{ €}$$

— **Calcul de u_2** : $1,025 \times 7125 + 2000$ ✓

— **Produit** : $\approx 7303,13$ ✓

— **Valeur** :

$$u_2 \approx 9303,13 \text{ €}$$

— **Observation** : la suite croît vite ✓

— **Rang 3** : $\approx 11\,535,70$ € ✓

— **Rang 4** : $\approx 13\,824,10$ € ✓

b) **Équation** : $x = 1,025x + 2000$ ✓

— **On retranche x** : $0 = 0,025x + 2000$ ✓

— **Isolement** : $0,025x = -2000$ ✓

— **Valeur** :

$$x = -80\,000$$

— **Interprétation** : une valeur **négative** ✓

— **Sens concret** : aucun pour une épargne ✓

— **Rôle mathématique** : il reste le point fixe du modèle ✓

— **Coefficient $a = 1,025 > 1$** : la suite s'éloigne de x ✓

— **Position de u_0** : $5000 > -80\,000$ ✓

— **Conséquence** : la suite croît sans limite ✓

— **Contrôle au rang 10** : $\approx 28\,807,19$ € ✓

— **Total versé sur 10 ans** : 20 000 € ✓

— **Plus le capital initial** : 25 000 € ✓

— **Intérêts gagnés** : $\approx 3807,19$ € ✓

Réponse. a) 7125 € et $\approx 9303,13$ € · b) il vaut $-80\,000$ € : aucun sens concret, la suite croît sans limite.

Correction de l'exercice 9 - Atteindre un objectif d'épargne

— **Méthode** : de proche en proche ✓

— **Rang 1** : 7125 € ✓

— **Rang 2** : $\approx 9303,13$ € ✓

— **Rang 3** : $\approx 11\,535,70$ € ✓

— **Rang 4** : $\approx 13\,824,10$ € ✓

— **Rang 5** : $\approx 16\,169,70$ € ✓

— **Rang 6** : $\approx 18\,573,94$ € ✓

— **Rang 7** : $\approx 21\,038,29$ € ✓

— **Rang 8** : $\approx 23\,564,25$ € ✓

- **Rang 9** : $\approx 26\,153,35$ € ✓
- **Rang 10** : $\approx 28\,807,19$ € ✓
- **Encore sous 30 000** ✓
- **Rang 11** : $\approx 31\,527,37$ € ✓
- **Seuil franchi** ✓
- **Réponse** :

11 ans

- **Total versé** : $11 \times 2000 + 5000$ ✓
- **Valeur** : 27 000 € ✓
- **Intérêts gagnés** : $\approx 4527,37$ € ✓
- **Sans intérêts** : le seuil serait franchi au rang 13 ✓
- **Détail** : $5000 + 13 \times 2000 = 31\,000$ € ✓
- **Gain en temps** : 2 ans ✓

Réponse. 11 ans, avec $\approx 31\,527$ €.

Correction de l'exercice 10 - Deux politiques de recrutement

a) **Modèle A** : $u_{n+1} = 0,8u_n + 1500$ ✓

- **Équation** : $0,2x = 1500$ ✓
- **Valeur** :

$$x_A = 7500 \text{ clients}$$

— **Modèle B** : $u_{n+1} = 0,8u_n + 1800$ ✓

- **Équation** : $0,2x = 1800$ ✓
- **Valeur** :

$$x_B = 9000 \text{ clients}$$

b) **Écart des équilibres** : 1500 clients ✓

- **Écart des recrutements** : 300 par an ✓
- **Rapport** : 5 ✓
- **Explication** : chaque client recruté « vaut » $\frac{1}{0,2} = 5$ clients à l'équilibre ✓
- **Interprétation** : un client recruté reste en moyenne 5 ans ✓
- **Coût d'un recrutement, disons 40 €** : 12 000 € par an pour A ✓
- **Pour B** : 14 400 € par an ✓
- **Surcoût** : 2400 € ✓
- **Clients gagnés à l'équilibre** : 1500 ✓
- **Coût par client supplémentaire** : $\frac{2400}{1500} = 1,60$ € par an ✓
- **Décision** : B si un client rapporte plus que cela ✓
- **Levier alternatif** : réduire le taux de perte ✓
- **Effet d'un passage à 15 % avec A** : $x = \frac{1500}{0,15}$ ✓
- **Valeur** : 10 000 clients ✓
- **Conclusion** : fidéliser bat recruter ✓

Réponse. a) 7500 et 9000 clients · b) 300 recrutements de plus valent 1500 clients à l'équilibre.

Correction de l'exercice 11 - Dimensionner un paramètre

a) **Modèle** : $s_{n+1} = 0,75s_n + b$ ✓

— **Condition d'équilibre** : $3000 = 0,75 \times 3000 + b$ ✓

— **Produit** : 2250 ✓

— **Isolement** : $b = 3000 - 2250$ ✓

— **Valeur** :

$$b = 750 \text{ unités}$$

— **Autre lecture** : $b = 0,25 \times 3000$ ✓

— **Concordance** ✓

b) **Test à 3000** : $0,75 \times 3000 + 750$ ✓

— **Somme** : 3000 ✓

— **Stable** ✓

— **Test à 4000** : $3000 + 750 = 3750$ ✓

— **Le stock baisse vers 3000** ✓

— **Test à 2000** : $1500 + 750 = 2250$ ✓

— **Le stock monte vers 3000** ✓

— **Conclusion** : l'équilibre est bien attracteur ✓

— **Justification** : $0 < 0,75 < 1$ ✓

— **Réapprovisionnement pour un équilibre de 5000** : 1250 ✓

— **Règle générale** : $b = (1 - a) \times x$ ✓

— **Contrôle** : $0,25 \times 5000 = 1250$ ✓

— **Avec une perte de 10 % et $x = 3000$** : $b = 300$ ✓

— **Lecture logistique** : on remplace exactement ce qui part ✓

Réponse. a) 750 unités par mois · b) $0,75 \times 3000 + 750 = 3000$.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

— **Erreur** : le terme +400 est ignoré ✓

— **Conséquence** : le modèle n'est pas géométrique ✓

— **Test avec $u_0 = 2000$** : $u_1 = 1800 + 400$ ✓

— **Valeur** : 2200 ✓

— **Quotient** : $\frac{2200}{2000} = 1,1$ ✓

— **Calcul de u_2** : $1980 + 400$ ✓

— **Valeur** : 2380 ✓

— **Quotient** : $\approx 1,0818$ ✓

— **Les quotients diffèrent** ✓

— **Preuve** : ce n'est pas géométrique ✓

— **Différences** : 200 puis 180 ✓

— **Elles diffèrent aussi** ✓

— **Ce n'est pas arithmétique non plus** ✓

— **Ce que donnerait sa formule pour $n = 2$** : $2000 \times 0,81$ ✓

— **Valeur** : 1620 ✓

— **Écart avec la vraie valeur** : 760 ✓

— **Bonne méthode** : calculer de proche en proche ✓

— **Point d'équilibre** : $x = \frac{400}{0,1}$ ✓

— **Valeur** :

$$x = 4000$$

— **Comportement** : la suite croît vers 4000 ✓

— **Sa formule donnerait** : une décroissance vers 0 ✓

— **Contradiction flagrante** ✓

Réponse. Le terme +400 change tout : la suite n'est pas géométrique et tend vers 4000, pas vers 0.

Correction de l'exercice 13 - Une suite auxiliaire

a) **Valeur de** v_0 : $2000 - 1200$ ✓

— **Valeur** :

$$v_0 = 800$$

— **Calcul de** u_1 : 1840 ✓

— **Valeur de** v_1 : $1840 - 1200$ ✓

— **Valeur** :

$$v_1 = 640$$

— **Calcul de** u_2 : 1712 ✓

— **Valeur de** v_2 : $1712 - 1200$ ✓

— **Valeur** : $v_2 = 512$ ✓

b) **Quotient** $\frac{v_1}{v_0}$: $\frac{640}{800}$ ✓

— **Valeur** : $0,8$ ✓

— **Quotient** $\frac{v_2}{v_1}$: $\frac{512}{640}$ ✓

— **Valeur** : $0,8$ ✓

— **Conclusion** :

(v_n) est géométrique de raison $0,8$

— **Terme général de** v_n : $800 \times 0,8^n$ ✓

— **Retour à** u_n : $u_n = 1200 + 800 \times 0,8^n$ ✓

— **Contrôle pour** $n = 3$: $800 \times 0,512 = 409,60$ ✓

— **Valeur** : $1609,60$ ✓

— **Concordance avec le calcul direct** ✓

— **Interprétation** : v_n mesure l'écart à l'équilibre ✓

— **Cet écart décroît géométriquement** ✓

— **Conséquence** : la suite tend bien vers 1200 ✓

— **Contrôle pour** $n = 10$: $800 \times 0,8^{10} \approx 85,90$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1285,90$ ✓

Réponse. a) $800 ; 640 ; 512$ · b) (v_n) est géométrique de raison $0,8$, d'où $u_n = 1200 + 800 \times 0,8^n$.

Correction de l'exercice 14 - Une population qui décline

a) **Calcul de** p_1 : $0,98 \times 12\,000 + 180$ ✓

— **Produit** : $11\,760$ ✓

— **Valeur :**

$$p_1 = 11\,940$$

— **Calcul de p_2 :** $0,98 \times 11\,940 + 180 \checkmark$

— **Produit :** $\approx 11\,701,20 \checkmark$

— **Valeur :**

$$p_2 = 11\,881,20$$

b) **Équation :** $x = 0,98x + 180 \checkmark$

— **On retranche :** $0,02x = 180 \checkmark$

— **Division :** $x = \frac{180}{0,02} \checkmark$

— **Valeur :**

$$x = 9000 \text{ habitants}$$

c) **Position de p_0 :** $12\,000 > 9000 \checkmark$

— **Conséquence :** la population **décroît** vers 9000 $\checkmark$

— **Vitesse :** lente, car 0,98 est proche de 1 $\checkmark$

— **Perte la première année :** 60 habitants $\checkmark$

— **Perte la deuxième :** ≈ 59 habitants $\checkmark$

— **Arrivées nécessaires pour stabiliser à 12 000 :** $0,02 \times 12\,000 \checkmark$

— **Valeur :** 240 par an $\checkmark$

— **Manque actuel :** 60 arrivées $\checkmark$

— **Concordance avec la perte annuelle** $\checkmark$

— **Contrôle sur le long terme, rang 30 :** $\approx 10\,636 \checkmark$

— **Conclusion pour la commune :** il faut 60 arrivées de plus par an $\checkmark$

Réponse. a) 11 940 et 11 881,20 · b) 9000 habitants · c) la population décroît lentement vers 9000.

Correction de l'exercice 15 - Choisir entre deux financements

a) **Emprunt A :** $0,003 \times 30\,000 \checkmark$

— **Intérêts du premier mois :**

$$90 \text{ €}$$

— **Part remboursée :** $700 - 90 \checkmark$

— **Valeur :** 610 € $\checkmark$

— **Emprunt B :** $0,005 \times 30\,000 \checkmark$

— **Intérêts du premier mois :**

$$150 \text{ €}$$

— **Part remboursée :** $800 - 150 \checkmark$

— **Valeur :** 650 € $\checkmark$

b) **Durée de A :** la dette suit $d_{n+1} = 1,003d_n - 700 \checkmark$

— **Nombre de mensualités :** 46 $\checkmark$

— **Coût brut :** $46 \times 700 \checkmark$

— **Valeur :** 32 200 € $\checkmark$

— **Durée de B :** $d_{n+1} = 1,005d_n - 800 \checkmark$

— **Nombre de mensualités :** 42 $\checkmark$

- **Coût brut** : 42×800 ✓
- **Valeur** : 33 600 € ✓
- **Comparaison** : A coûte moins cher ✓
- **Écart** : 1400 € environ ✓
- **Explication** : son taux est plus faible ✓
- **Contrepartie** : il dure 4 mois de plus ✓
- **Critère de décision** : le coût total ✓
- **Autre critère** : la mensualité supportable ✓
- **Ici A demande 100 € de moins par mois** ✓

Réponse. a) 90 € et 150 € · b) A, pour $\approx 32\,200$ € contre $\approx 33\,600$ €.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un parc de véhicules

a) **Calcul de f_1** : $0,82 \times 600 + 90$ ✓

- **Produit** : 492 ✓
- **Valeur** :

$$f_1 = 582$$

- **Calcul de f_2** : $0,82 \times 582 + 90$ ✓
- **Produit** : $\approx 477,24$ ✓
- **Valeur** :

$$f_2 = 567,24$$

- **Observation** : la flotte diminue ✓

b) **Équation** : $x = 0,82x + 90$ ✓

- **On retranche** : $0,18x = 90$ ✓
- **Division** : $x = \frac{90}{0,18}$ ✓
- **Valeur** :

$$x = 500 \text{ véhicules}$$

- **Position de f_0** : $600 > 500$ ✓
- **Conséquence** : la flotte décroît vers 500 ✓
- **Contrôle au rang 5** : $\approx 537,07$ ✓

c) **Condition** : $600 = 0,82 \times 600 + b$ ✓

- **Produit** : 492 ✓
- **Isolement** : $b = 600 - 492$ ✓
- **Valeur** :

$$b = 108 \text{ véhicules}$$

- **Autre lecture** : $0,18 \times 600$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Achats supplémentaires** : 18 par an ✓
- **Coût, à 25 000 € l'unité** : 450 000 € par an ✓
- **Décision** : arbitrer entre flotte et budget ✓

Réponse. a) 582 et 567,24 · b) 500 véhicules · c) 108 achats par an.