

Plaquette 1 – Modéliser, calculer un seuil, cumuler

Suites numériques et modèles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Suite **arithmétique** de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + nr$.
- Suite **géométrique** de raison q : $u_{n+1} = q u_n$ et $u_n = u_0 \times q^n$.
- **Modélisation** : $+t\%$ par période $\Rightarrow$ géométrique de raison $q = 1 + \frac{t}{100}$; $+c$ unités par période $\Rightarrow$ arithmétique de raison $r = c$.
- **Sommes** :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \quad (\text{arithmétique})$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{géométrique, } q \neq 1)$$

- **Seuil** : on calcule les termes de proche en proche jusqu'à franchir la valeur visée ; l'algorithme correspondant utilise une boucle « tant que ».
- Variations : arithmétique croissante si $r > 0$; géométrique à termes positifs croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.
- Modèle **mixte** $u_{n+1} = a u_n + b$: ni arithmétique ni géométrique ; on calcule ses termes de proche en proche.

Correction de l'exercice 1 - Choisir le modèle

On regarde si l'évolution est en **valeur** (arithmétique) ou en **pourcentage** (géométrique).

- Pourcentage : suite **géométrique** de raison $q = 1,02$, avec $u_0 = 700$.
- Valeur fixe : suite **arithmétique** de raison $r = -250$, avec $u_0 = 5\,000$.
- Pourcentage : suite **géométrique** de raison $q = 1 - 0,015 = 0,985$, avec $u_0 = 12\,000$.

Réponse. a) géométrique $q = 1,02$ · b) arithmétique $r = -250$ · c) géométrique $q = 0,985$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer un terme

Formule du cours : $u_n = u_0 \times q^n$.

- $u_8 = 1\,500 \times 1,06^8$. Or $1,06^8 \approx 1,593\,848$, donc $u_8 \approx 2\,390,77$.
- $u_{15} = 1\,500 \times 1,06^{15} \approx 1\,500 \times 2,396\,558 \approx 3\,594,84$.
- Interprétation : un capital de 1 500 € placé à 6 % par an dépasse 3 500 € au bout de 15 ans.

Réponse. $u_8 \approx 2\,390,77$ et $u_{15} \approx 3\,594,84$.

Correction de l'exercice 3 - Recherche d'un seuil (tableau)

- Hausse de 7 % : suite géométrique de raison 1,07, donc $e_n = 80 \times 1,07^n$.
- On calcule chaque terme :

n	4	5	6	7
e_n	105	112	120	128

- $1,07^4 \approx 1,3108$ donc $e_4 \approx 105$; $e_5 \approx 112$; $e_6 \approx 120,06$; $e_7 \approx 128,46$.
- Le premier terme strictement supérieur à 120 est $e_6 \approx 120,06$: l'effectif dépasse 120 salariés au bout de 6 **ans**.
- Attention à l'arrondi : e_6 vaut 120,06, donc il dépasse bien 120, même si l'arrondi à l'unité affiche 120.

Réponse. a) $e_n = 80 \times 1,07^n$ · b) au bout de 6 ans ($e_6 \approx 120,06$).

Correction de l'exercice 4 - Algorithme de seuil

- Le seuil à dépasser est 120 : la boucle doit continuer **tant que** $e \leq 120$.
- À chaque tour, l'effectif est multiplié par le coefficient 1,07.

```
def seuil():
    e = 80
    n = 0
    while e <= 120:
        e = e * 1.07
        n = n + 1
    return n
```

- La fonction renvoie 6, ce qui confirme le tableau.
- Remarque : la condition $e \leq 120$ et non $e < 120$ traduit « dépasser », c'est-à-dire être **strictement** supérieur.

Réponse. $while\ e \leq 120$ et $e = e \times 1,07$; la fonction renvoie 6.

Correction de l'exercice 5 - Somme de termes (arithmétique)

Les primes forment une suite arithmétique de premier terme $p_1 = 300$ et de raison $r = 40$.

a) La 10^e prime : $p_{10} = 300 + 9 \times 40 = 300 + 360 = 660$ €.

b) Somme de 10 termes consécutifs :

$$S = 10 \times \frac{300 + 660}{2} = 10 \times 480 = 4\,800 \text{ €}$$

- Contrôle : la prime moyenne est 480 € ($= \frac{300 + 660}{2}$), sur 10 ans cela donne bien 4 800 €.

Réponse. a) 660 € · b) 4 800 € au total.

Correction de l'exercice 6 - Somme de termes (géométrique)

Les versements forment une suite géométrique de premier terme 1 000 et de raison 1,05 ; il y a 8 termes ($n = 0$ à 7).

$$S = 1\,000 \times \frac{1 - 1,05^8}{1 - 1,05}$$

- $1,05^8 \approx 1,477\,455$.
- Numérateur : $1 - 1,477\,455 = -0,477\,455$; dénominateur : $-0,05$.
- $S \approx 1\,000 \times 9,549\,109 \approx 9\,549,11$ €.

- Ordre de grandeur : 8 versements d'environ 1 200 € en moyenne, soit un peu moins de 10 000 €. Cohérent.

Réponse. $S \approx 9\,549,11$ €.

Correction de l'exercice 7 - Comparer deux modèles

a) Offre A : suite arithmétique, $A_n = 24\,000 + 600n$.

- Offre B : suite géométrique, $B_n = 24\,000 \times 1,022^n$.

b) Au bout de 5 ans :

- $A_5 = 24\,000 + 3\,000 = 27\,000$ €.
- $B_5 = 24\,000 \times 1,022^5 \approx 24\,000 \times 1,114\,95 \approx 26\,759$ €. L'offre **A** est meilleure.

Au bout de 15 ans :

- $A_{15} = 24\,000 + 9\,000 = 33\,000$ €.
- $B_{15} = 24\,000 \times 1,022^{15} \approx 24\,000 \times 1,386\,00 \approx 33\,264$ €. L'offre **B** passe devant.
- Explication : la croissance en pourcentage s'applique à un salaire qui grossit, son effet s'accélère.

Réponse. b) À 5 ans : A (27 000 € contre $\approx 26\,759$ €) · à 15 ans : B ($\approx 33\,264$ € contre 33 000 €).

Correction de l'exercice 8 - Deux termes connus

- Formule du cours : $u_3 = u_0 \times q^3$, donc $q^3 = \frac{691,488}{400} = 1,728\,72$.
- On prend la racine cubique : $q = 1,728\,72^{\frac{1}{3}} \approx 1,2$.
- Vérification : $400 \times 1,2^3 = 400 \times 1,728 = 691,2$; avec $q = 1,2$ on retrouve la valeur à l'arrondi près.
- Interprétation : la suite croît de 20 % par période.

Réponse. $q \approx 1,2$, soit +20 % par période.

Correction de l'exercice 9 - Suite mixte

a) Perdre 15 % revient à multiplier par $1 - 0,15 = 0,85$; on ajoute ensuite les 500 nouveaux abonnés. D'où

$$a_{n+1} = 0,85 a_n + 500$$

b) $a_1 = 0,85 \times 2\,000 + 500 = 1\,700 + 500 = 2\,200$.

- $a_2 = 0,85 \times 2\,200 + 500 = 1\,870 + 500 = 2\,370$.
- $a_3 = 0,85 \times 2\,370 + 500 = 2\,014,5 + 500 = 2\,514,5$, soit environ 2 515 abonnés.

c) Non. Les quotients successifs ne sont pas constants : $\frac{2\,200}{2\,000} = 1,1$ alors que $\frac{2\,370}{2\,200} \approx 1,077$.

- La suite n'est pas non plus arithmétique (+200 puis +170). C'est un modèle **mixte**, que l'on étudie terme à terme.
- Remarque : elle se stabilise vers la valeur x telle que $x = 0,85x + 500$, soit $x = \frac{500}{0,15} \approx 3\,333$ abonnés.

Réponse. b) 2 200 ; 2 370 ; $\approx 2\,515$ · c) non, ni géométrique ni arithmétique.

Correction de l'exercice 10 - Problème : amortissement d'un véhicule

- a) Perdre 18 % : coefficient 0,82, donc $v_n = 28\,000 \times 0,82^n$.
 b) $0,82^4 \approx 0,452\,122$, donc $v_4 \approx 12\,659$ €.
 c) On calcule de proche en proche :

n	4	5	6
v_n (€)	12 659	10 381	8 512

- $v_5 \approx 10\,381 > 10\,000$ et $v_6 \approx 8\,512 < 10\,000$.
 — La valeur passe sous 10 000 € au bout de 6 **ans**.

Réponse. a) $v_n = 28\,000 \times 0,82^n$ · b) $\approx 12\,659$ € · c) au bout de 6 ans.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : plan d'épargne

- a) Chaque année, le capital est multiplié par 1,035 puis augmenté de 1 200 € :

$$c_{n+1} = 1,035 c_n + 1\,200 \quad \text{avec } c_0 = 5\,000$$

- b) $c_1 = 1,035 \times 5\,000 + 1\,200 = 5\,175 + 1\,200 = 6\,375$ €.
 — $c_2 = 1,035 \times 6\,375 + 1\,200 = 6\,598,125 + 1\,200 = 7\,798,13$ €.
 — $c_3 = 1,035 \times 7\,798,125 + 1\,200 = 8\,071,06 + 1\,200 = 9\,271,06$ €.
 c) Algorithme de seuil :

```
def seuil():
    c = 5000
    n = 0
    while c <= 15000:
        c = 1.035 * c + 1200
        n = n + 1
    return n
```

- En poursuivant les calculs : $c_4 \approx 10\,795,55$ €, $c_5 \approx 12\,373,39$ €, $c_6 \approx 14\,006,46$ €, $c_7 \approx 15\,696,69$ €.
 — La fonction renvoie donc 7 : le capital dépasse 15 000 € au bout de 7 ans.

Réponse. a) $c_{n+1} = 1,035 c_n + 1\,200$ · b) 6 375 € ; 7 798,13 € ; 9 271,06 € · c) 7 ans.