Plaquette 1 – Modéliser, calculer un seuil, cumuler

Suites numériques et modèles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Suite **arithmétique** de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + nr$.

— Suite **géométrique** de raison q : $u_{n+1} = q\,u_n$ et $u_n = u_0 \times q^n$.

— **Modélisation** : $+t\,\%$ par période $\Rightarrow$ géométrique de raison $q = 1 + \dfrac{t}{100}$; $+c$ unités par période $\Rightarrow$ arithmétique de raison $r = c$.

— **Sommes** :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \quad \text{(arithmétique)}$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{(géométrique, } q \neq 1\text{)}$$

— **Seuil** : on calcule les termes de proche en proche jusqu'à franchir la valeur visée ; l'algorithme correspondant utilise une boucle « tant que ».

— Variations : arithmétique croissante si $r > 0$; géométrique à termes positifs croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.

— **Moyennes.** a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si $b = \dfrac{a+c}{2}$ (moyenne arithmétique), d'une suite géométrique à termes positifs si $b = \sqrt{ac}$ (moyenne géométrique).

— **Notation** $\sum$: $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

— **Versements réguliers** : V euros versés en fin de chaque année pendant n ans à $t\,\%$ donnent la valeur acquise $V \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, avec $q = 1 + \dfrac{t}{100}$.

Correction de l'exercice 1 – Choisir le modèle

On regarde si l'évolution est en **valeur** (arithmétique) ou en **pourcentage** (géométrique).

a) Pourcentage : suite **géométrique** de raison $q = 1{,}02$, avec $u_0 = 700$.

b) Valeur fixe : suite **arithmétique** de raison $r = -250$, avec $u_0 = 5\,000$.

c) Pourcentage : suite **géométrique** de raison $q = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$, avec $u_0 = 12\,000$.

Réponse. a) géométrique $q = 1{,}02$ · b) arithmétique $r = -250$ · c) géométrique $q = 0{,}985$.

Correction de l'exercice 2 – Calculer un terme

Formule du cours : $u_n = u_0 \times q^n$.

— $u_8 = 1\,500 \times 1{,}06^8$. Or $1{,}06^8 \approx 1{,}593\,848$, donc $u_8 \approx 2\,390{,}77$.

— $u_{15} = 1\,500 \times 1{,}06^{15} \approx 1\,500 \times 2{,}396\,558 \approx 3\,594{,}84$.

— Interprétation : un capital de 1 500 € placé à 6 % par an dépasse 3 500 € au bout de 15 ans.

Réponse. $u_8 \approx 2\,390{,}77$ et $u_{15} \approx 3\,594{,}84$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Trois termes consécutifs

On compare le terme du milieu à la moyenne arithmétique et à la moyenne géométrique des deux autres.

a) $\frac{5+13}{2} = 9$: suite arithmétique (raison 4). En revanche, $\sqrt{5\times 13} = \sqrt{65} \neq 9$: pas géométrique.

b) $\frac{4+9}{2} = 6{,}5 \neq 6$: pas arithmétique. Mais

$$\sqrt{4\times 9} = \sqrt{36} = 6$$

donc suite géométrique (raison 1,5).

c) $\frac{10+40}{2} = 25 \neq 20$: pas arithmétique ; $\sqrt{10\times 40} = 20$: géométrique de raison 2.

Réponse. a) arithmétique — b) géométrique — c) géométrique.

Correction de l’exercice 4 – Estimer une valeur manquante

a) Avec une hausse en valeur constante, les trois populations sont en progression arithmétique : on prend la moyenne arithmétique,

$$\frac{40\,000 + 44\,100}{2} = 42\,050$$

b) Avec un pourcentage constant, elles sont en progression géométrique : on prend la moyenne géométrique,

$$\sqrt{40\,000\times 44\,100} = 200\times 210 = 42\,000$$

Le coefficient annuel vaut $\frac{42\,000}{40\,000} = 1{,}05$: +5 % par an. Les deux estimations sont proches, car l’évolution sur deux ans est faible.

Réponse. a) 42 050 — b) 42 000, soit +5 % par an.

Correction de l’exercice 5 – Recherche d’un seuil (tableau)

a) Hausse de 7 % : suite géométrique de raison 1,07, donc $e_n = 80\times 1{,}07^{\,n}$.

b) On calcule chaque terme :

n	**4**	**5**	**6**	**7**
e_n	105	112	120	128

— $1{,}07^4 \approx 1{,}310\,8$ donc $e_4 \approx 105$; $e_5 \approx 112$; $e_6 \approx 120{,}06$; $e_7 \approx 128{,}46$.
— Le premier terme strictement supérieur à 120 est $e_6 \approx 120{,}06$: l’effectif dépasse 120 salariés au bout de 6 **ans**.
— Attention à l’arrondi : e_6 vaut 120,06, donc il dépasse bien 120, même si l’arrondi à l’unité affiche 120.

Réponse. a) $e_n = 80\times 1{,}07^{\,n}$ · b) au bout de 6 ans ($e_6 \approx 120{,}06$).

Correction de l’exercice 6 – Algorithme de seuil

— Le seuil à dépasser est 120 : la boucle doit continuer **tant que** $e \leq 120$.
— À chaque tour, l’effectif est multiplié par le coefficient 1,07.

```
def seuil():
    e = 80
    n = 0
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
    while e <= 120:
        e = e * 1.07
        n = n + 1
    return n
```

— La fonction renvoie 6, ce qui confirme le tableau.
— Remarque : la condition *e <= 120* et non *e < 120* traduit « dépasser », c'est-à-dire être **strictement** supérieur.

Réponse. *while e <= 120* et *e = e * 1.07* ; la fonction renvoie 6.

Correction de l'exercice 7 – Somme de termes (arithmétique)

Les primes forment une suite arithmétique de premier terme $p_1 = 300$ et de raison $r = 40$.

a) La 10^{e} prime : $p_{10} = 300 + 9 \times 40 = 300 + 360 = 660$ €.

b) Somme de 10 termes consécutifs :

$$S = 10 \times \frac{300 + 660}{2} = 10 \times 480 = 4\,800 \text{ €}$$

— Contrôle : la prime moyenne est 480 € ($= \frac{300 + 660}{2}$), sur 10 ans cela donne bien 4 800 €.

Réponse. a) 660 € · b) 4 800 € au total.

Correction de l'exercice 8 – Somme de termes (géométrique)

Les versements forment une suite géométrique de premier terme 1 000 et de raison 1,05 ; il y a 8 termes ($n = 0$ à 7).

$$S = 1\,000 \times \frac{1 - 1{,}05^{8}}{1 - 1{,}05}$$

— $1{,}05^{8} \approx 1{,}477\,455$.
— Numérateur : $1 - 1{,}477\,455 = -0{,}477\,455$; dénominateur : $-0{,}05$.
— $S \approx 1\,000 \times 9{,}549\,109 \approx 9\,549{,}11$ €.
— Ordre de grandeur : 8 versements d'environ 1 200 € en moyenne, soit un peu moins de 10 000 €. Cohérent.

Réponse. $S \approx 9\,549{,}11$ €.

Correction de l'exercice 9 – La notation sigma

On remplace k par chacune de ses valeurs, puis on additionne.

a) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$; c'est la somme de 5 termes d'une suite géométrique de raison 2 : $\frac{2^{5} - 1}{2 - 1} = 31$.

c) Les termes 5, 8, …, 32 forment une suite arithmétique de raison 3 ; il y en a 10 :

$$\sum_{k=1}^{10} (3k + 2) = 10 \times \frac{5 + 32}{2} = 185$$

Réponse. a) 55 — b) 31 — c) 185.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Programmer une somme

a) La variable s est un accumulateur, initialisé à 0 ; à chaque tour, on lui ajoute k^2, pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

b) Pour $n = 10$: $1 + 4 + 9 + \cdots + 100 = 385$.

c) Il suffit de remplacer la ligne d’accumulation par $s = s + 1 / k$: on obtient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Réponse. a) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ — b) 385 — c) $s = s + 1 / k$.

Correction de l’exercice 11 – Comparer deux modèles

a) Offre A : suite arithmétique, $A_n = 24\,000 + 600n$.

— Offre B : suite géométrique, $B_n = 24\,000 \times 1{,}022^{\,n}$.

b) Au bout de 5 ans :

— $A_5 = 24\,000 + 3\,000 = 27\,000$ €.

— $B_5 = 24\,000 \times 1{,}022^5 \approx 24\,000 \times 1{,}114\,95 \approx 26\,759$ €. L’offre **A** est meilleure.

Au bout de 15 ans :

— $A_{15} = 24\,000 + 9\,000 = 33\,000$ €.

— $B_{15} = 24\,000 \times 1{,}022^{15} \approx 24\,000 \times 1{,}386\,00 \approx 33\,264$ €. L’offre **B** passe devant.

— Explication : la croissance en pourcentage s’applique à un salaire qui grossit, son effet s’accélère.

Réponse. b) À 5 ans : A (27 000 € contre ≈ 26 759 €) · à 15 ans : B (≈ 33 264 € contre 33 000 €).

Correction de l’exercice 12 – Deux termes connus

D’après la formule du cours, $u_3 = u_0 \times q^3$, donc

$$q^3 = \frac{691{,}2}{400} = 1{,}728$$

On cherche le nombre positif dont le cube vaut 1,728 : $q = 1{,}728^{\frac{1}{3}} = 1{,}2$, car $1{,}2^3 = 1{,}728$.

Vérification : $400 \times 1{,}2^3 = 400 \times 1{,}728 = 691{,}2$. La suite augmente de 20 % par période.

Réponse. $q = 1{,}2$, soit +20 % par période.

Correction de l’exercice 13 – Des versements réguliers

a) Le premier versement a rapporté des intérêts pendant 9 ans : il vaut $1\,200 \times 1{,}03^9$. Le dernier, versé à la fin de la dixième année, vaut 1 200 €.

b) Le capital est la somme des dix versements, chacun augmenté de ses intérêts :

$$C = 1\,200 + 1\,200 \times 1{,}03 + \cdots + 1\,200 \times 1{,}03^9 = 1\,200 \times \frac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03 - 1}$$

C’est la somme des 10 premiers termes d’une suite géométrique de premier terme 1 200 et de raison 1,03. On obtient $C \approx 1\,200 \times 11{,}4639 \approx 13\,756{,}66$ €, pour 12 000 € versés : environ 1 757 € d’intérêts.

Réponse. a) $1\,200 \times 1{,}03^9$ et 1 200 € — b) $C \approx 13\,756{,}66$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Problème : amortissement d’un véhicule

a) Perdre 18 % : coefficient 0,82, donc $v_n = 28\,000 \times 0{,}82^{\,n}$.

b) $0{,}82^{4} \approx 0{,}452\,122$, donc $v_4 \approx 12\,659$ €.

c) On calcule de proche en proche :

n	**4**	**5**	**6**
v_n (€)	12 659	10 381	8 512

— $v_5 \approx 10\,381 > 10\,000$ et $v_6 \approx 8\,512 < 10\,000$.
— La valeur passe sous 10 000 € au bout de 6 **ans**.

Réponse. a) $v_n = 28\,000 \times 0{,}82^{\,n}$ · b) $\approx 12\,659$ € · c) au bout de 6 ans.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : plan d’épargne

a) $c_1 = 5\,000 \times 1{,}035 + 1\,200 = 6\,375$ € et $c_2 = 6\,375 \times 1{,}035 + 1\,200 = 7\,798{,}125$, soit environ 7 798,13 €.

b) Au bout de n ans, le placement initial vaut $5\,000 \times 1{,}035^{n}$. Les n versements valent $1\,200$, $1\,200 \times 1{,}035$, …, $1\,200 \times 1{,}035^{\,n-1}$: c’est une somme géométrique de raison 1,035,

$$1\,200 \times \frac{1{,}035^{n} - 1}{1{,}035 - 1}$$

c) On répète « intérêts puis versement » tant que le capital ne dépasse pas 15 000 € :

```
def seuil():
    c = 5000
    n = 0
    while c <= 15000:
        c = 1.035 * c + 1200
        n = n + 1
    return n
```

La formule donne $c_6 \approx 14\,006{,}46$ € et $c_7 \approx 15\,696{,}69$ € : la fonction renvoie 7.

Réponse. a) 6 375 € ; ≈ 7 798,13 € — c) au bout de 7 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).