Plaquette 5 – Notation Σ, moyennes et versements réguliers

Suites numériques et modèles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Notation. $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$, qui compte $n - p + 1$ termes.

Sommes usuelles.

— arithmétique : nombre de termes $\times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$;

— géométrique ($q \neq 1$) : premier $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

Moyennes. Moyenne arithmétique de a et b : $\dfrac{a+b}{2}$. Moyenne géométrique de $a > 0$ et $b > 0$: $\sqrt{ab}$. Le coefficient moyen de deux évolutions de coefficients c_1 et c_2 est $\sqrt{c_1 c_2}$.

Versements réguliers. V euros versés à la fin de chaque période pendant n périodes, au taux t par période, donnent

$$V \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Correction de l'exercice 1 – Écrire une somme avec sigma

a) Le terme $2k+1$ vaut 3 pour $k = 1$ et 41 pour $2k + 1 = 41$, c'est-à-dire $k = 20$:

$$3 + 5 + \cdots + 41 = \sum_{k=1}^{20} (2k+1)$$

b) Les termes forment une suite arithmétique de raison 2 ; il y en a 20. La somme vaut $20 \times \dfrac{3+41}{2} = 20 \times 22 = 440$.

Réponse. a) $\sum_{k=1}^{20} (2k+1)$ — b) 440.

Correction de l'exercice 2 – Somme de cubes

On développe chaque somme :

$$\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 \qquad \sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

d'où $\left(\sum_{k=1}^{4} k\right)^2 = 100$.

Les deux résultats sont égaux. Ce n'est pas un hasard : pour tout n, la somme des n premiers cubes est égale au carré de la somme des n premiers entiers. On peut le tester avec $n = 3$: $1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$.

Réponse. 100 dans les deux cas.

Correction de l'exercice 3 – Somme d'inverses

On réduit au dénominateur commun 60 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = \frac{60+30+20+15+12}{60} = \frac{137}{60} \approx 2{,}283$$

Les termes 1 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ ne forment ni une suite arithmétique (différences non constantes) ni une suite géométrique (quotients non constants) : aucune formule du cours ne s'applique, on additionne terme à terme, ou l'on programme une boucle.

Réponse. $\frac{137}{60} \approx 2{,}283$; aucune formule ne s'applique.

Correction de l'exercice 4 – Compter les termes

De $k=3$ à $k=12$, il y a $12-3+1=10$ termes. Le premier est $u_3 = 500 \times 1{,}04^3 \approx 562{,}43$:

$$\sum_{k=3}^{12} u_k = u_3 \times \frac{1{,}04^{10}-1}{1{,}04-1} \approx 562{,}43 \times 12{,}0061 \approx 6752{,}6$$

L'erreur fréquente est de compter 9 termes ($12-3$) au lieu de 10, ou de partir de u_0 au lieu de u_3.

Réponse. 10 termes ; $\approx 6752{,}6$.

Correction de l'exercice 5 – Une épargne mensuelle

Le premier versement est capitalisé 23 mois, le dernier 0 mois. Le capital est la somme géométrique

$$100 + 100 \times 1{,}0025 + \cdots + 100 \times 1{,}0025^{23} = 100 \times \frac{1{,}0025^{24}-1}{0{,}0025}$$

ce qui donne environ 2470,28 €.

Pour 2400 € versés, les intérêts rapportent environ 70 € en deux ans.

Réponse. $\approx 2470{,}28$ €.

Correction de l'exercice 6 – Le taux mensuel équivalent

Le coefficient mensuel c doit vérifier $c^{12} = 1{,}03$:

$$c = 1{,}03^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}002466$$

Le taux mensuel équivalent est d'environ 0,2466 %.

Il est légèrement inférieur à 0,25 % : avec 0,25 % par mois, les intérêts se composeraient et l'on obtiendrait $1{,}0025^{12} \approx 1{,}0304$, soit un peu plus de 3 % sur l'année.

Réponse. $\approx 0{,}2466$ % par mois, un peu moins que 0,25 %.

Correction de l'exercice 7 – Le taux moyen de deux évolutions

Les coefficients des deux évolutions sont 1,2 et 0,9. Le coefficient moyen est leur **moyenne géométrique** :

$$\sqrt{1{,}2 \times 0{,}9} = \sqrt{1{,}08} \approx 1{,}0392$$

Le taux annuel moyen est d'environ 3,92 %.

La moyenne arithmétique des taux, $\frac{20-10}{2} = 5$ %, donnerait sur deux ans $1{,}05^2 = 1{,}1025$, alors que l'évolution réelle est $1{,}2 \times 0{,}9 = 1{,}08$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. ≈ 3,92 % par an, et non 5 %.

Correction de l’exercice 8 – Intercaler un point

a) L’abscisse intermédiaire est $\dfrac{2+6}{2} = 4$, et la valeur estimée est la moyenne géométrique

$$\sqrt{100 \times 400} = \sqrt{40\,000} = 200$$

b) Entre $x = 2$ et $x = 6$, la grandeur est multipliée par 4 en 4 unités : $q^4 = 4$, donc $q = \sqrt{2}$. De $x = 2$ à $x = 4$, on multiplie par $q^2 = 2$: la valeur est 200, ce qui confirme l’estimation. Pour une croissance exponentielle, le point du milieu s’obtient par la moyenne géométrique, pas par la moyenne arithmétique (250).

Réponse. a) $x = 4$ et $y = 200$ — b) $q = \sqrt{2}$, et $100 \times 2 = 200$.

Correction de l’exercice 9 – Quel versement pour un objectif ?

Après 60 versements mensuels, le capital vaut

$$V \times \frac{1{,}002^{60} - 1}{0{,}002} \approx V \times 63{,}68$$

On résout $V \times 63{,}68 = 20\,000$, d’où $V \approx 314{,}07$ €.

Sans intérêts, il faudrait verser $\dfrac{20\,000}{60} \approx 333{,}33$ € par mois : les intérêts économisent environ 19 € par mois.

Réponse. $V \approx 314{,}07$ € par mois.

Correction de l’exercice 10 – Combien d’années de versements ?

Après n versements, le capital vaut $2000 \times \dfrac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} = 50\,000 \times (1{,}04^n - 1)$. On résout :

$$50\,000 \times (1{,}04^n - 1) > 30\,000 \Leftrightarrow 1{,}04^n > 1{,}6 \Leftrightarrow n > \frac{\log(1{,}6)}{\log(1{,}04)} \approx 11{,}98$$

Il faut 12 années de versements. Vérification : environ 26 973 € après 11 ans et 30 052 € après 12 ans.

Réponse. Au bout de 12 ans.

Correction de l’exercice 11 – Deux plans d’épargne

Ana : versements arithmétiques de 1000 à $1000 + 9 \times 100 = 1900$, soit

$$\sum_{k=0}^{9} (1000 + 100k) = 10 \times \frac{1000 + 1900}{2} = 14\,500 \text{ €}$$

Bruno : versements géométriques de raison 1,05, soit $1000 \times \dfrac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} \approx 12\,577{,}89$ €.

Ana verse davantage sur dix ans : +100 € par an, c’est plus que +5 % de versements qui restent inférieurs à 2000 €. Sur une durée plus longue, la croissance géométrique finirait par l’emporter.

Réponse. Ana : 14 500 € ; Bruno : ≈ 12 577,89 €.

Correction de l’exercice 12 – Une masse salariale

Le salaire de l’année de rang k (de 0 à 9) vaut $24\,000 + 600k$. Le total est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sum_{k=0}^{9}(24\,000+600k)=10\times\frac{24\,000+29\,400}{2}=267\,000\ €$$

car le dernier salaire vaut $24\,000+600\times9=29\,400$ €. Le salaire moyen sur la période est de 26 700 €, la moyenne du premier et du dernier.

Réponse. 267 000 €.

Correction de l’exercice 13 – Repérer une erreur

De $k=0$ à $k=9$, il y a 10 termes, pas 9. L’exposant de la formule est le **nombre de termes** :

$$\sum_{k=0}^{9}1{,}05^{k}=\frac{1-1{,}05^{10}}{1-1{,}05}\approx12{,}58$$

L’élève a oublié le dernier terme, $1{,}05^{9}\approx1{,}55$: c’est exactement l’écart entre les deux résultats.

Réponse. ≈ 12,58 (dix termes, exposant 10).

Correction de l’exercice 14 – Vérifier une formule par programme

a) La boucle ajoute u_0q^k pour k allant de 0 à $n-1$: la fonction calcule

$$\sum_{k=0}^{n-1}u_0q^k=u_0+u_0q+\cdots+u_0q^{n-1}$$

b) La fonction renvoie environ 12 577,89, et la formule donne $1000\times\dfrac{1-1{,}05^{10}}{1-1{,}05}\approx12\,577{,}89$: les deux concordent. Le programme est utile quand aucune formule n’existe (somme d’inverses, par exemple).

Réponse. a) $\sum_{k=0}^{n-1}u_0q^k$ — b) ≈ 12 577,89 dans les deux cas.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : un projet d’achat

a) Le placement initial vaut $3000\times1{,}025^{n}$ après n ans ; les n versements forment une somme géométrique de premier terme 1500 et de raison 1,025.

b) $1500\times\dfrac{1{,}025^{n}-1}{0{,}025}=60\,000\times(1{,}025^{n}-1)$, donc $C_n=(3000+60\,000)\times1{,}025^{n}-60\,000$.

c) On résout $63\,000\times1{,}025^{n}-60\,000\geq20\,000$, soit $1{,}025^{n}\geq\dfrac{80\,000}{63\,000}\approx1{,}2698$:

$$n\geq\frac{\log(1{,}2698)}{\log(1{,}025)}\approx9{,}68$$

Elle pourra acheter le véhicule au bout de 10 ans ($C_9\approx18\,678$ € et $C_{10}\approx20\,645$ €).

Réponse. c) Au bout de 10 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).