Plaquette 2 – Suites arithmétiques et sommes

Suites numériques et modèles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. (u_n) est arithmétique de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n.

Terme général. $u_n = u_0 + nr$, et plus généralement $u_n = u_p + (n-p)r$.

Raison à partir de deux termes.

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

Sens de variation. Croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.

Somme de termes consécutifs.

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$$

avec $n - p + 1$ termes. En particulier $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une suite arithmétique

On calcule les différences entre termes consécutifs : elles doivent être toutes égales.

a) Les différences valent toutes 3 : suite arithmétique de raison $r = 3$.

b) Les différences valent 4, 12, 36 : la suite n'est pas arithmétique. En revanche, chaque terme est le triple du précédent :

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$$

c'est une suite géométrique de raison 3.

c) Les différences valent toutes -6 : suite arithmétique de raison $r = -6$, décroissante.

Réponse. a) oui, $r = 3$ — b) non (géométrique de raison 3) — c) oui, $r = -6$.

Correction de l'exercice 2 – Terme général

a) Pour passer de u_0 à u_n, on ajoute n fois la raison :

$$u_n = u_0 + nr = 5 + 3n$$

b) $u_{10} = 5 + 3 \times 10 = 35$ et $u_{20} = 5 + 3 \times 20 = 65$.

Contrôle : entre u_{10} et u_{20}, il y a 10 pas de 3, soit 30 ; on retrouve bien $35 + 30 = 65$.

Réponse. a) $u_n = 3n + 5$ — b) $u_{10} = 35$ et $u_{20} = 65$.

Correction de l'exercice 3 – Deux termes connus

a) Entre les rangs 3 et 9, il y a 6 pas de raison r :

$$r = \frac{u_9 - u_3}{9 - 3} = \frac{41 - 17}{6} = 4$$

b) On recule de 3 pas depuis u_3 : $u_0 = 17 - 3 \times 4 = 5$, donc $u_n = 4n + 5$.

c) $u_{20} = 4 \times 20 + 5 = 85$. Contrôle avec la formule : $u_9 = 36 + 5 = 41$, correct.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $r = 4$ — b) $u_0 = 5$ et $u_n = 4n + 5$ — c) $u_{20} = 85$.

Correction de l'exercice 4 – Franchir un seuil

On résout l'inéquation du premier degré :

$$3n + 5 \geq 150 \Leftrightarrow 3n \geq 145 \Leftrightarrow n \geq \frac{145}{3} \approx 48{,}33$$

Le plus petit entier qui convient est $n = 49$.

Vérification de part et d'autre : $u_{48} = 149 < 150$ et $u_{49} = 152 \geq 150$. Pour une suite arithmétique, une simple inéquation du premier degré suffit : pas besoin d'algorithme.

Réponse. $n = 49$, avec $u_{49} = 152$.

Correction de l'exercice 5 – Somme de termes

La somme compte $20 - 0 + 1 = 21$ termes. Le premier vaut $u_0 = 5$ et le dernier $u_{20} = 65$.

$$\sum_{k=0}^{20} u_k = 21 \times \frac{5 + 65}{2} = 21 \times 35 = 735$$

Le piège classique est de compter 20 termes au lieu de 21 : de 0 à 20 inclus, il y a bien 21 rangs.

Réponse. 735.

Correction de l'exercice 6 – La somme des premiers entiers

a) Les entiers de 1 à 100 forment une suite arithmétique de raison 1, avec 100 termes :

$$1 + 2 + \cdots + 100 = 100 \times \frac{1 + 100}{2} = 5050$$

b) De même, avec n termes, de premier 1 et de dernier n :

$$\sum_{k=1}^{n} k = n \times \frac{1 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

On peut aussi écrire la somme à l'endroit et à l'envers : chaque colonne vaut $n + 1$, et il y a n colonnes pour deux fois la somme.

Réponse. a) 5050 — b) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Un abonnement

a) Chaque mois ajoute 35 € : la suite est arithmétique, de premier terme $c_0 = 60$ et de raison 35, donc $c_n = 35n + 60$.

b) $c_{12} = 35 \times 12 + 60 = 480$ € et $c_{24} = 35 \times 24 + 60 = 900$ €.

c) On résout :

$$35n + 60 > 1000 \Leftrightarrow n > \frac{940}{35} \approx 26{,}9$$

Le coût dépasse 1000 € au 27$^{\text{e}}$ mois : $c_{26} = 970$ € et $c_{27} = 1005$ €.

Réponse. a) $c_n = 35n + 60$ — b) 480 € et 900 € — c) au 27$^{\text{e}}$ mois.

Correction de l'exercice 8 – Un amortissement linéaire

a) La valeur baisse d'un montant fixe : suite arithmétique de raison -4000, donc $v_n = 24\,000 - 4000n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $v_3 = 24\,000 - 12\,000 = 12\,000$ € : la moitié de la valeur d'achat.

c) On résout $v_n = 0$:

$$24\,000 - 4000n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{24\,000}{4000} = 6$$

Le véhicule est totalement amorti au bout de 6 ans. C'est l'amortissement « linéaire » des comptables : la même charge chaque année.

Réponse. a) $v_n = 24\,000 - 4000n$ — b) 12 000 € — c) au bout de 6 ans.

Correction de l'exercice 9 – Une production croissante

a) $p_n = 1200 + 150n$.

b) Le neuvième mois a le rang 8 (le premier a le rang 0) : $p_8 = 1200 + 150 \times 8 = 2400$ unités.

c) Les douze premiers mois vont du rang 0 au rang 11, avec $p_{11} = 1200 + 1650 = 2850$:

$$\sum_{k=0}^{11} p_k = 12 \times \frac{1200 + 2850}{2} = 12 \times 2025 = 24\,300$$

La production totale est de 24 300 unités.

Réponse. a) $p_n = 150n + 1200$ — b) 2400 unités — c) 24 300 unités.

Correction de l'exercice 10 – Variations et signe

a) $u_0 = 200$, et chaque terme s'obtient en retirant 12 au précédent : raison $r = -12$.

b) Non : $r < 0$, la suite est strictement décroissante.

c) On résout :

$$200 - 12n < 0 \Leftrightarrow n > \frac{200}{12} \approx 16{,}67$$

Les termes sont négatifs à partir du rang 17 : $u_{16} = 8$ et $u_{17} = -4$.

Réponse. a) $u_0 = 200$, $r = -12$ — b) non, décroissante — c) à partir de $n = 17$.

Correction de l'exercice 11 – Repérer une erreur

L'élève a divisé par le rang 11 au lieu du **nombre de pas** entre les deux termes. Entre les rangs 5 et 11, il y a 6 pas :

$$r = \frac{47 - 23}{11 - 5} = \frac{24}{6} = 4$$

Ensuite $u_0 = u_5 - 5 \times 4 = 23 - 20 = 3$, donc $u_n = 4n + 3$.

Vérification : $u_{11} = 44 + 3 = 47$.

Réponse. $r = 4$ et $u_n = 4n + 3$.

Correction de l'exercice 12 – Deux modèles comparés

a) $a_5 = 500 + 200 = 700$ et $b_5 = 300 + 300 = 600$: A est devant.

b) B part de plus bas mais progresse plus vite. On résout :

$$300 + 60n > 500 + 40n \Leftrightarrow 20n > 200 \Leftrightarrow n > 10$$

B dépasse A à partir du rang 11. Au rang 10, les deux valent 900 : c'est l'égalité, pas encore le dépassement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $a_5 = 700$ et $b_5 = 600$ — b) à partir de $n = 11$.

Correction de l'exercice 13 – Une somme partielle

a) $u_5 = 35 + 10 = 45$ et $u_{15} = 105 + 10 = 115$.

b) De 5 à 15 inclus, il y a $15 - 5 + 1 = 11$ termes :

$$\sum_{k=5}^{15} u_k = 11 \times \frac{45 + 115}{2} = 11 \times 80 = 880$$

La formule « nombre de termes × moyenne du premier et du dernier » s'applique à n'importe quelle tranche de la suite, pas seulement à partir de u_0.

Réponse. a) $u_5 = 45$ et $u_{15} = 115$ — b) 880.

Correction de l'exercice 14 – Un remboursement

a) La dette baisse de 750 € par mois : $d_n = 18\,000 - 750n$.

b) $d_{12} = 18\,000 - 9000 = 9000$ € : la moitié de la dette est remboursée.

c) On résout $d_n = 0$:

$$n = \frac{18\,000}{750} = 24$$

L'emprunt est soldé en 24 mois. Avec des intérêts, le calcul serait différent : la part d'intérêts diminue au fil des mois.

Réponse. a) $d_n = 18\,000 - 750n$ — b) 9000 € — c) 24 mois.

Correction de l'exercice 15 – Reconnaître le bon modèle

Une évolution **en valeur** (on ajoute ou retire un nombre fixe) donne une suite arithmétique ; une évolution **en pourcentage** donne une suite géométrique.

a) Arithmétique, $r = 25$.
b) Géométrique, $q = 1{,}03$.
c) Arithmétique, $r = -500$.
d) Géométrique : diminuer de 10 % revient à multiplier par

$$q = 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$$

Réponse. a) arithmétique — b) géométrique — c) arithmétique — d) géométrique.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un plan d'embauche

a) $e_n = 240 + 18n$.

b) $e_5 = 240 + 90 = 330$ salariés.

c) $240 + 18n > 400 \Leftrightarrow n > \frac{160}{18} \approx 8{,}9$: au bout de 9 ans ($e_9 = 402$).

d) De $e_1 = 258$ à $e_{10} = 420$, il y a 10 termes :

$$\sum_{k=1}^{10} e_k = 10 \times \frac{258 + 420}{2} = 3390$$

Cette somme compte des « années-salariés » : multipliée par un coût annuel moyen, elle donne la masse salariale totale de la période.

Réponse. a) $e_n = 18n + 240$ — b) 330 — c) 9 ans — d) 3390 années-salariés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).