

Plaquette 2 - Suites arithmétiques et sommes

Suites numériques et modèles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Une suite est arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Reconnaître. On calcule les différences successives : elles doivent être **toutes égales**.

$$r = u_{n+1} - u_n$$

Terme général.

$$u_n = u_0 + nr$$

Si le premier terme est u_1 :

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Retrouver la raison à partir de deux termes.

$$r = \frac{u_p - u_n}{p - n}$$

Variations.

Signe de r	Suite
$r > 0$	croissante
$r < 0$	décroissante
$r = 0$	constante

Somme des termes.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

On multiplie le **nombre de termes** par la **moyenne** du premier et du dernier.

△ De u_0 à u_n , il y a $n + 1$ termes, pas n .

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une suite arithmétique

a) **Première différence** : $8 - 5 = 3$ ✓

— **Deuxième** : $11 - 8 = 3$ ✓

— **Troisième** : $14 - 11 = 3$ ✓

— **Quatrième** : $17 - 14 = 3$ ✓

— **Toutes égales** ✓

— **Conclusion** : arithmétique de raison

$$r = 3$$

b) **Première différence** : $6 - 2 = 4$ ✓

— **Deuxième** : $18 - 6 = 12$ ✓

- **Elles diffèrent** ✓
- **Conclusion** : **non** arithmétique ✓
- **Quotients** : $\frac{6}{2} = 3$ et $\frac{18}{6} = 3$ ✓
- **Nature** : géométrique de raison 3 ✓
- c) **Première différence** : $34 - 40 = -6$ ✓
- **Deuxième** : $28 - 34 = -6$ ✓
- **Troisième** : $22 - 28 = -6$ ✓
- **Conclusion** : arithmétique de raison

$$r = -6$$

- **Variations** : décroissante ✓
- **Terme suivant de a)** : 20 ✓
- **Terme suivant de c)** : 16 ✓
- **Réflexe** : différences pour l'arithmétique, quotients pour la géométrie ✓

Réponse. a) oui, $r = 3$ · b) non (géométrique de raison 3) · c) oui, $r = -6$.

Correction de l'exercice 2 - Terme général

- a) **Formule** : $u_n = u_0 + nr$ ✓
- **Substitution** : $u_n = 5 + 3n$ ✓
 - **Expression** :

$$u_n = 3n + 5$$

- **Nature** : une expression **affine** en n ✓

b) **Calcul de u_{10}** : $3 \times 10 + 5$ ✓

- **Produit** : 30 ✓
- **Valeur** :

$$u_{10} = 35$$

- **Calcul de u_{20}** : $3 \times 20 + 5$ ✓
- **Produit** : 60 ✓
- **Valeur** :

$$u_{20} = 65$$

- **Contrôle de proche en proche** : $u_1 = 8$ ✓
- **Puis** : $u_2 = 11$, $u_3 = 14$ ✓
- **Concordance avec la formule** : $3 \times 3 + 5 = 14$ ✓
- **Écart entre u_{10} et u_{20}** : 30 ✓
- **Contrôle** : 10 pas de 3 ✓
- **Concordance** ✓
- **Valeur de u_{100}** : 305 ✓

Réponse. a) $u_n = 3n + 5$ · b) $u_{10} = 35$ et $u_{20} = 65$.

Correction de l'exercice 3 - Deux termes connus

- a) **Nombre de pas** : $9 - 3$ ✓
- **Valeur** : 6 ✓
 - **Différence des termes** : $41 - 17$ ✓

— **Valeur** : 24 ✓

— **Raison** : $\frac{24}{6}$ ✓

— **Valeur** :

$$r = 4$$

b) **Relation** : $u_3 = u_0 + 3r$ ✓

— **Substitution** : $17 = u_0 + 12$ ✓

— **Isolement** :

$$u_0 = 5$$

— **Terme général** :

$$u_n = 4n + 5$$

— **Vérification sur** u_3 : $12 + 5 = 17$ ✓

— **Vérification sur** u_9 : $36 + 5 = 41$ ✓

— **Concordance** ✓

c) **Calcul** : $4 \times 20 + 5$ ✓

— **Produit** : 80 ✓

— **Valeur** :

$$u_{20} = 85$$

— **Contrôle par** u_9 : $41 + 11 \times 4$ ✓

— **Ajout** : 44 ✓

— **Valeur** : 85 ✓

— **Concordance** ✓

— **Erreur fréquente** : diviser par $9 - 3 + 1 = 7$ ✓

— **Pourquoi c'est faux** : on compte les pas, pas les termes ✓

Réponse. a) $r = 4$ · b) $u_0 = 5$ et $u_n = 4n + 5$ · c) $u_{20} = 85$.

Correction de l'exercice 4 - Franchir un seuil

— **Inéquation** : $3n + 5 \geq 150$ ✓

— **On retranche 5** : $3n \geq 145$ ✓

— **Division par 3** : $n \geq \frac{145}{3}$ ✓

— **Décimal** : $\approx 48,33$ ✓

— **n est un entier** ✓

— **Plus petit entier convenable** :

$$n = 49$$

— **Vérification** : $3 \times 49 + 5$ ✓

— **Produit** : 147 ✓

— **Valeur** : $u_{49} = 152$ ✓

— **Contrôle** : $152 \geq 150$ ✓

— **Contrôle du rang précédent** : $3 \times 48 + 5$ ✓

— **Valeur** : $u_{48} = 149$ ✓

— **Contrôle** : $149 < 150$ ✓

— **Conclusion confirmée** ✓

— **Piège** : arrondir 48,33 à 48 ✓

- **Règle** : pour un seuil « au moins », on arrondit **au-dessus** ✓
- **Recherche du seuil** : $n \geq 500$: $n \geq 165$ ✓
- **Détail** : $\frac{495}{3} = 165$ ✓
- **Ici la division tombe juste** : $u_{165} = 500$ ✓

Réponse. $n = 49$, avec $u_{49} = 152$.

Correction de l'exercice 5 - Somme de termes

- **Nombre de termes** : de 0 à 20 ✓
- **Compte** : 21 termes ✓
- **Premier terme** : $u_0 = 5$ ✓
- **Dernier terme** : $u_{20} = 65$ ✓
- **Formule** : nombre de termes multiplié par la moyenne ✓
- **Moyenne** : $\frac{5 + 65}{2}$ ✓
- **Valeur** : 35 ✓
- **Somme** : 21×35 ✓
- **Valeur** :

735

- **Contrôle partiel**, u_0 à u_4 : $5 + 8 + 11 + 14 + 17$ ✓
- **Somme** : 55 ✓
- **Par la formule** : $5 \times \frac{5 + 17}{2}$ ✓
- **Valeur** : $5 \times 11 = 55$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Erreur fréquente** : compter 20 termes ✓
- **Ce que cela donnerait** : 700 ✓
- **Écart** : 35, soit exactement un terme moyen ✓
- **Somme de u_1 à u_{20}** : $735 - 5$ ✓
- **Valeur** : 730 ✓

Réponse. 735.

Correction de l'exercice 6 - La somme des premiers entiers

a) **Nature de la suite** : arithmétique de raison 1 ✓

- **Nombre de termes** : 100 ✓
- **Premier** : 1 ✓
- **Dernier** : 100 ✓
- **Moyenne** : $\frac{1 + 100}{2}$ ✓
- **Valeur** : 50,5 ✓
- **Somme** : $100 \times 50,5$ ✓
- **Valeur** :

5050

b) **Nombre de termes** : n ✓

- **Moyenne** : $\frac{1 + n}{2}$ ✓
- **Formule** :

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

- **Contrôle pour $n = 100$** : $\frac{100 \times 101}{2}$ ✓
- **Numérateur** : 10 100 ✓
- **Valeur** : 5050 ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle pour $n = 10$** : $\frac{10 \times 11}{2} = 55$ ✓
- **Vérification directe** : $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Anecdote** : le jeune Gauss aurait apparié $1 + 100$, $2 + 99$, etc. ✓
- **Nombre de paires** : 50 ✓
- **Valeur de chaque paire** : 101 ✓
- **Produit** : 5050 ✓

Réponse. a) 5050 · b) $\frac{n(n+1)}{2}$.

Correction de l'exercice 7 - Un abonnement

- a) **Coût initial** : $c_0 = 60$ € ✓
- **Ajout mensuel** : 35 € ✓
- **Nature** : arithmétique de raison 35 ✓
- **Expression** :

$$c_n = 35n + 60$$

- b) **Après 12 mois** : $35 \times 12 + 60$ ✓
- **Produit** : 420 ✓
- **Valeur** :

$$480 \text{ €}$$

- **Après 24 mois** : $35 \times 24 + 60$ ✓
- **Produit** : 840 ✓
- **Valeur** :

$$900 \text{ €}$$

- c) **Inéquation** : $35n + 60 > 1000$ ✓
- **On retranche 60** : $35n > 940$ ✓
- **Division** : $n > \frac{940}{35}$ ✓
- **Décimal** : $\approx 26,86$ ✓
- **Plus petit entier** : $n = 27$ ✓
- **Vérification** : $35 \times 27 + 60$ ✓
- **Valeur** : 1005 € ✓
- **Contrôle du rang précédent** : $c_{26} = 970$ € ✓
- **Conclusion** : au 27^e mois ✓
- **Coût moyen mensuel sur 12 mois** : $\frac{480}{12} = 40$ € ✓
- **Sur 24 mois** : 37,50 € ✓
- **Explication** : les frais fixes se diluent ✓

Réponse. a) $c_n = 35n + 60$ · b) 480 € et 900 € · c) au 27^e mois.

Correction de l'exercice 8 - Un amortissement linéaire

a) **Valeur initiale** : $v_0 = 24\,000$ € ✓

— **Perte annuelle** : 4000 € ✓

— **Raison** : -4000 ✓

— **Expression** :

$$v_n = 24\,000 - 4000n$$

— **Variations** : décroissante ✓

b) **Substitution** : $24\,000 - 4000 \times 3$ ✓

— **Produit** : 12 000 ✓

— **Valeur** :

$$v_3 = 12\,000 \text{ €}$$

— **Lecture** : la moitié de la valeur est partie ✓

c) **Équation** : $24\,000 - 4000n = 0$ ✓

— **Isolement** : $4000n = 24\,000$ ✓

— **Solution** :

$$n = 6 \text{ ans}$$

— **Vocabulaire** : la durée d'amortissement ✓

— **Taux d'amortissement annuel** : $\frac{4000}{24\,000}$ ✓

— **Décimal** : $\approx 0,1667$ ✓

— **Valeur** : $\approx 16,67\%$ de la valeur d'origine ✓

— **Contrôle** : $\frac{1}{6}$ ✓

— **Différence avec un amortissement dégressif** : il serait géométrique ✓

— **Exemple, -20 % par an** : $v_3 = 24\,000 \times 0,8^3$ ✓

— **Valeur** : 12 288 € ✓

— **Et il ne s'annule jamais** ✓

Réponse. a) $v_n = 24\,000 - 4000n$ · b) 12 000 € · c) au bout de 6 ans.

Correction de l'exercice 9 - Une production croissante

a) **Raison** : 150 ✓

— **Expression** :

$$p_n = 150n + 1200$$

b) **Neuvième mois** : rang $n = 8$ ✓

— **Attention** : le premier mois est le rang 0 ✓

— **Calcul** : $150 \times 8 + 1200$ ✓

— **Produit** : 1200 ✓

— **Valeur** :

$$p_8 = 2400 \text{ unités}$$

c) **Douze mois** : rangs 0 à 11 ✓

— **Nombre de termes** : 12 ✓

- **Dernier terme** : $150 \times 11 + 1200$ ✓
 - **Produit** : 1650 ✓
 - **Valeur** : $p_{11} = 2850$ ✓
 - **Moyenne** : $\frac{1200 + 2850}{2}$ ✓
 - **Valeur** : 2025 ✓
 - **Somme** : 12×2025 ✓
 - **Production totale** :
24 300 unités
 - **Production moyenne mensuelle** : 2025 ✓
 - **Contrôle** : $\frac{24\,300}{12} = 2025$ ✓
 - **Concordance** ✓
 - **Mois où l'on dépasse 3000** : $150n + 1200 > 3000$ ✓
 - **Solution** : $n > 12$, donc $n = 13$ ✓
 - **Soit le quatorzième mois** ✓
- Réponse.** a) $p_n = 150n + 1200$ · b) 2400 unités · c) 24 300 unités.

Correction de l'exercice 10 - Variations et signe

- a) **Terme initial** : $u_0 = 200$ ✓
- **Raison** : le coefficient de n ✓
 - **Valeur** :
 $r = -12$
- b) **Signe de la raison** : négatif ✓
- **Conclusion** : la suite est **décroissante** ✓
 - **Contrôle** : $u_1 = 188$ ✓
 - **Puis** : $u_2 = 176$ ✓
 - **Chaque terme perd 12** ✓
- c) **Inéquation** : $200 - 12n < 0$ ✓
- **Isolement** : $200 < 12n$ ✓
 - **Division** : $n > \frac{200}{12}$ ✓
 - **Décimal** : $\approx 16,67$ ✓
 - **Plus petit entier** :
 $n = 17$
 - **Vérification** : $200 - 204$ ✓
 - **Valeur** : $u_{17} = -4$ ✓
 - **Contrôle du rang précédent** : $u_{16} = 8$ ✓
 - **Positif** ✓
 - **Conclusion confirmée** ✓
 - **Rang où la suite s'annulerait** : $\frac{200}{12} \approx 16,67$ ✓
 - **Ce n'est pas un entier** ✓
 - **Conséquence** : la suite ne prend jamais la valeur 0 ✓
 - **Interprétation dans un contexte de stock** : la rupture a lieu au rang 17 ✓
- Réponse.** a) $u_0 = 200$, $r = -12$ · b) non, décroissante · c) à partir de $n = 17$.

Correction de l'exercice 11 – Repérer une erreur

- **Erreur** : le dénominateur ✓
- **Ce qu'il a mis** : 11, le rang du second terme ✓
- **Ce qu'il fallait** : le **nombre de pas** ✓
- **Calcul du nombre de pas** : $11 - 5$ ✓
- **Valeur** : 6 ✓
- **Raison correcte** : $\frac{24}{6}$ ✓
- **Valeur** :

$$r = 4$$

- **Vérification** : $u_5 + 6r$ ✓
- **Calcul** : $23 + 24$ ✓
- **Valeur** : 47 ✓
- **Concordance avec** u_{11} ✓
- **Avec sa raison** : $23 + 6 \times 2,18$ ✓
- **Valeur** : $\approx 36,08$ ✓
- **Écart avec 47** : ≈ 11 ✓
- **Preuve de l'erreur** ✓
- **Calcul de** u_0 : $23 - 5 \times 4$ ✓
- **Valeur** : 3 ✓
- **Terme général** : $u_n = 4n + 3$ ✓
- **Contrôle** : $u_5 = 23$ et $u_{11} = 47$ ✓
- **Règle à retenir** : $r = \frac{u_p - u_n}{p - n}$ ✓

Réponse. $r = \frac{47 - 23}{11 - 5} = 4$, et $u_n = 4n + 3$.

Correction de l'exercice 12 – Deux modèles comparés

a) **Modèle A** : $500 + 40 \times 5$ ✓

- **Produit** : 200 ✓
- **Valeur** :

$$a_5 = 700$$

- **Modèle B** : $300 + 60 \times 5$ ✓
- **Produit** : 300 ✓
- **Valeur** :

$$b_5 = 600$$

- **Comparaison** : A est encore devant ✓

b) **Inéquation** : $300 + 60n > 500 + 40n$ ✓

- **On retranche** $40n$: $300 + 20n > 500$ ✓
- **On retranche** 300 : $20n > 200$ ✓
- **Division** : $n > 10$ ✓
- **Plus petit entier** :

$$n = 11$$

- **Vérification** : $a_{11} = 500 + 440 = 940$ ✓

- **Et** : $b_{11} = 300 + 660 = 960$ ✓
- **Comparaison** : $960 > 940$ ✓
- **Contrôle au rang 10** : $a_{10} = 900$ ✓
- **Et** : $b_{10} = 900$ ✓
- **Égalité** ✓
- **Interprétation** : les deux modèles se croisent au rang 10 ✓
- **Raison du dépassement** : B a la plus grande raison ✓
- **Règle** : la plus grande raison finit toujours par l'emporter ✓
- **Écart au rang 20** : $b_{20} - a_{20} = 1500 - 1300 = 200$ ✓

Réponse. a) $a_5 = 700$ et $b_5 = 600$ · b) à partir de $n = 11$.

Correction de l'exercice 13 - Une somme partielle

a) **Calcul de u_5** : $35 + 10$ ✓

— **Valeur** :

$$u_5 = 45$$

— **Calcul de u_{15}** : $105 + 10$ ✓

— **Valeur** :

$$u_{15} = 115$$

b) **Nombre de termes** : de 5 à 15 ✓

— **Compte** : $15 - 5 + 1$ ✓

— **Valeur** : 11 termes ✓

— **Moyenne** : $\frac{45 + 115}{2}$ ✓

— **Numérateur** : 160 ✓

— **Valeur** : 80 ✓

— **Somme** : 11×80 ✓

— **Valeur** :

$$880$$

— **Contrôle par différence de sommes** : de u_0 à u_{15} ✓

— **Nombre de termes** : 16 ✓

— **Moyenne** : $\frac{10 + 115}{2} = 62,5$ ✓

— **Somme** : 1000 ✓

— **De u_0 à u_4** : 5 termes ✓

— **Moyenne** : $\frac{10 + 38}{2} = 24$ ✓

— **Somme** : 120 ✓

— **Différence** : $1000 - 120$ ✓

— **Valeur** : 880 ✓

— **Concordance** ✓

Réponse. a) $u_5 = 45$ et $u_{15} = 115$ · b) 880.

Correction de l'exercice 14 - Un remboursement

a) **Dette initiale** : $d_0 = 18\,000$ € ✓

— **Raison** : -750 ✓

— **Expression :**

$$d_n = 18\,000 - 750n$$

b) **Après 12 mensualités :** $18\,000 - 750 \times 12$ ✓

— **Produit :** 9000 ✓

— **Valeur :**

$$d_{12} = 9000 \text{ €}$$

— **Lecture :** la moitié est remboursée ✓

c) **Équation :** $18\,000 - 750n = 0$ ✓

— **Isolement :** $750n = 18\,000$ ✓

— **Solution :**

$$n = 24 \text{ mois}$$

— **Soit :** deux ans ✓

— **Contrôle :** $750 \times 24 = 18\,000 \text{ €}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Total remboursé :** 18 000 € ✓

— **Remarque :** ce modèle ignore les intérêts ✓

— **Avec 3 % d'intérêts annuels :** le total dépasserait 18 000 € ✓

— **Mensualité pour solder en 18 mois :** $\frac{18\,000}{18}$ ✓

— **Valeur :** 1000 € ✓

— **Mensualité pour 36 mois :** 500 € ✓

— **Dettes après 20 mensualités :** 3000 € ✓

Réponse. a) $d_n = 18\,000 - 750n$ · b) 9000 € · c) 24 mois.

Correction de l'exercice 15 - Reconnaître le bon modèle

a) **Mot-clé :** « de 25 € » ✓

— **Une quantité fixe s'ajoute** ✓

— **Modèle :**

arithmétique, $r = 25$

b) **Mot-clé :** « de 3 % » ✓

— **Un pourcentage s'applique** ✓

— **Coefficient :** 1,03 ✓

— **Modèle :**

géométrique, $q = 1,03$

c) **Mot-clé :** « 500 habitants » ✓

— **Modèle :** arithmétique de raison -500 ✓

d) **Mot-clé :** « de 10 % » ✓

— **Coefficient :** 0,9 ✓

— **Modèle :** géométrique de raison 0,9 ✓

— **Règle de reconnaissance :** une **unité** donne l'arithmétique ✓

— **Un pourcentage donne la géométrie** ✓

— **Piège :** « le loyer augmente de 25 % » serait géométrique ✓

— **Différence sur 10 ans, cas a) avec $u_0 = 800$:** 1050 € ✓

- **Si c'était +25 % par an** : $800 \times 1,25^{10}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 7450,58$ € ✓
- **Écart considérable** ✓
- **Leçon** : lire attentivement l'unité de l'évolution ✓

Réponse. a) arithmétique · b) géométrique · c) arithmétique · d) géométrique.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un plan d'embauche

a) **Effectif initial** : $e_0 = 240$ ✓

- **Raison** : 18 ✓
- **Expression** :

$$e_n = 18n + 240$$

b) **Substitution** : $18 \times 5 + 240$ ✓

- **Produit** : 90 ✓
- **Valeur** :

$$e_5 = 330 \text{ salariés}$$

c) **Inéquation** : $18n + 240 > 400$ ✓

- **On retranche 240** : $18n > 160$ ✓
- **Division** : $n > \frac{160}{18}$ ✓
- **Décimal** : $\approx 8,89$ ✓
- **Plus petit entier** :

$$n = 9 \text{ ans}$$

- **Vérification** : $18 \times 9 + 240$ ✓
- **Valeur** : 402 ✓
- **Contrôle du rang précédent** : $e_8 = 384$ ✓
- **Conclusion confirmée** ✓

d) **Recrutements annuels** : 18, constants ✓

- **Sur 10 ans** : 18×10 ✓
- **Total** :

$$180 \text{ recrutements}$$

- **Contrôle** : $e_{10} - e_0$ ✓
- **Valeur** : $420 - 240 = 180$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Remarque** : ce modèle ignore les départs ✓
- **Avec 10 départs par an** : raison nette 8 ✓
- **Effectif au bout de 10 ans alors** : 320 ✓

Réponse. a) $e_n = 18n + 240$ · b) 330 · c) 9 ans · d) 180 recrutements.