

Plaquette 3 – Suites géométriques et pourcentages

Suites numériques et modèles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition.

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Du pourcentage à la raison.

Énoncé	Raison q
+6 % par an	1,06
−15 % par an	0,85
+3,5 % par mois	1,035

$$q = 1 + \frac{t}{100}$$

Reconnaître. On calcule les **quotients** successifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: ils doivent être tous égaux.

Raison à partir de deux termes.

$$q^{p-n} = \frac{u_p}{u_n}$$

Variations (termes strictement positifs).

Valeur de q	Suite
$q > 1$	croissante
$0 < q < 1$	décroissante
$q = 1$	constante

Somme de termes consécutifs ($q \neq 1$) :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Seuil. On teste les puissances de q à la calculatrice jusqu'à franchir la valeur visée.

△ $u_0 \times q^n$ n'est **pas** $(u_0 q)^n$: la puissance ne porte que sur q .

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une suite géométrique

a) **Premier quotient** : $\frac{12}{3} = 4 \checkmark$

— **Deuxième** : $\frac{48}{12} = 4 \checkmark$

— **Troisième** : $\frac{192}{48} = 4 \checkmark$

— **Conclusion** : géométrique de raison

$$q = 4$$

b) **Premier quotient** : $\frac{90}{100} = 0,9 \checkmark$

— **Deuxième** : $\frac{81}{90} = 0,9$ ✓

— **Troisième** : $\frac{72,9}{81} = 0,9$ ✓

— **Conclusion** : géométrique de raison

$$q = 0,9$$

— **Lecture** : une baisse de 10 % à chaque étape ✓

c) **Premier quotient** : $\frac{10}{5} = 2$ ✓

— **Deuxième** : $\frac{15}{10} = 1,5$ ✓

— **Ils diffèrent** ✓

— **Conclusion** : **non** géométrique ✓

— **Différences** : 5 à chaque fois ✓

— **Nature** : arithmétique de raison 5 ✓

— **Terme suivant de a)** : 768 ✓

— **Terme suivant de b)** : 65,61 ✓

— **Réflexe** : quotients pour la géométrique, différences pour l'arithmétique ✓

Réponse. a) oui, $q = 4$ · b) oui, $q = 0,9$ · c) non (arithmétique de raison 5).

Correction de l'exercice 2 - Du pourcentage à la raison

a) **Coefficient** : $1 + 0,06$ ✓

— **Raison** :

$$q = 1,06$$

b) **Coefficient** : $1 - 0,15$ ✓

— **Raison** :

$$q = 0,85$$

— **Contrôle** : $q < 1$, la suite décroît ✓

c) **Coefficient** : $1 + 0,035$ ✓

— **Raison** : $q = 1,035$ ✓

— **Attention** : la période est le **mois** ✓

— **Sur un an** : $1,035^{12}$ ✓

— **Valeur** : $\approx 1,5111$ ✓

— **Soit** : $\approx +51,11\%$ par an ✓

d) **Coefficient** : $1 - 0,024$ ✓

— **Raison** :

$$q = 0,976$$

— **Sur un an** : $0,976^4$ ✓

— **Valeur** : $\approx 0,9074$ ✓

— **Soit** : $\approx -9,26\%$ par an ✓

— **Piège** : $4 \times 2,4 = 9,6\%$ ✓

— **Écart** : 0,34 point ✓

— **Règle** : toujours préciser la **période** de la raison ✓

— **Conversion** : élever à la puissance du nombre de périodes ✓

Réponse. a) $1,06$ · b) $0,85$ · c) $1,035$ · d) $0,976$.

Correction de l'exercice 3 - Terme général et calculs

a) **Terme initial** : $u_0 = 2000$ ✓

— **Raison** : $1,06$ ✓

— **Expression** :

$$u_n = 2000 \times 1,06^n$$

b) **Calcul de** $1,06^5$: $\approx 1,33823$ ✓

— **Produit** : $2000 \times 1,33823$ ✓

— **Valeur** :

$$u_5 \approx 2676,45 \text{ €}$$

— **Calcul de** $1,06^{10}$: $\approx 1,7908$ ✓

— **Produit** : $2000 \times 1,7908$ ✓

— **Valeur** :

$$u_{10} \approx 3581,70 \text{ €}$$

— **Contrôle** : $u_{10} = u_5 \times 1,06^5$ ✓

— **Calcul** : $2676,45 \times 1,33823$ ✓

— **Valeur** : $\approx 3581,70 \text{ €}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Hausse totale sur 10 ans** : $\approx +79,08 \%$ ✓

— **Piège** : $10 \times 6 = 60 \%$ ✓

— **Écart** : 19 points ✓

— **Intérêts gagnés** : $\approx 1581,70 \text{ €}$ ✓

— **Avec des intérêts simples** : 1200 € ✓

— **Gain de la capitalisation** : $\approx 381,70 \text{ €}$ ✓

Réponse. a) $u_n = 2000 \times 1,06^n$ · b) $\approx 2676,45 \text{ €}$ et $\approx 3581,70 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 4 - Une suite décroissante

a) **Raison** : $0,85$ ✓

— **Expression** :

$$s_n = 5000 \times 0,85^n$$

b) **Calcul de** $0,85^5$: $\approx 0,4437$ ✓

— **Produit** : $5000 \times 0,4437$ ✓

— **Valeur** :

$$\approx 2218,53 \text{ pièces}$$

— **Lecture** : plus de la moitié a été écoulee ✓

c) **Analyse** : chaque terme est $0,85$ fois le précédent ✓

— **Un produit de nombres positifs reste positif** ✓

— **Conclusion** :

le stock ne s'annule jamais

— **Comportement** : il tend vers 0 ✓

- **Contrôle pour $n = 20$** : $0,85^{20} \approx 0,0388$ ✓
- **Stock** : ≈ 194 pièces ✓
- **Pour $n = 50$** : $\approx 1,4$ pièce ✓
- **Limite du modèle** : on ne vend pas 1,4 pièce ✓
- **En pratique** : le stock finit par être épuisé ✓
- **Différence avec un modèle arithmétique** : -750 par mois s'annulerait ✓
- **Rang alors** : $n = \frac{5000}{750} \approx 6,67$ ✓
- **Leçon** : une décroissance en pourcentage ne s'éteint jamais ✓

Réponse. a) $s_n = 5000 \times 0,85^n$ · b) ≈ 2219 pièces · c) non, il tend vers 0 sans l'atteindre.

Correction de l'exercice 5 - Deux termes connus

a) **Nombre de pas** : $5 - 2 = 3$ ✓

— **Relation** : $q^3 = \frac{2488,32}{1440}$ ✓

— **Quotient** : $1,728$ ✓

— **Racine cubique** : $1,728^{\frac{1}{3}}$ ✓

— **Valeur** :

$$q = 1,2$$

— **Vérification** : $1,2^3 = 1,728$ ✓

b) **Relation** : $u_2 = u_0 \times q^2$ ✓

— **Substitution** : $1440 = u_0 \times 1,44$ ✓

— **Isolement** : $u_0 = \frac{1440}{1,44}$ ✓

— **Valeur** :

$$u_0 = 1000$$

— **Vérification** : $1000 \times 1,2^2 = 1440$ ✓

— **Et** : $1000 \times 1,2^5 = 2488,32$ ✓

— **Concordance** ✓

c) **Taux** : $q - 1$ ✓

— **Valeur** :

$$+20\%$$

— **Terme général** : $u_n = 1000 \times 1,2^n$ ✓

— **Contrôle de u_1** : 1200 ✓

— **Contrôle de u_3** : 1728 ✓

— **Contrôle de u_4** : $2073,6$ ✓

— **Erreur fréquente** : diviser par 5 au lieu de 3 ✓

Réponse. a) $q = 1,2$ · b) $u_0 = 1000$ · c) $+20\%$ par période.

Correction de l'exercice 6 - Franchir un seuil vers le haut

— **Inéquation** : $2000 \times 1,06^n \geq 4000$ ✓

— **Division par 2000** : $1,06^n \geq 2$ ✓

— **Interprétation** : on cherche le doublement ✓

— **Test pour $n = 10$** : $\approx 1,7908$ ✓

- **Insuffisant** ✓
- **Test pour $n = 11$:** $\approx 1,8983$ ✓
- **Toujours insuffisant** ✓
- **Test pour $n = 12$:** $\approx 2,0122$ ✓
- **Objectif atteint** ✓
- **Réponse :**

$$n = 12$$
- **Capital correspondant :** $2000 \times 2,0122$ ✓
- **Valeur :** $\approx 4024,39$ € ✓
- **Capital au rang 11 :** $\approx 3796,60$ € ✓
- **Contrôle :** inférieur à 4000 € ✓
- **Conclusion confirmée** ✓
- **Estimation par la règle des 70 :** $\frac{70}{6} \approx 11,7$ ✓
- **Arrondi :** 12 ans ✓
- **Concordance** ✓
- **Justification de la croissance :** $q > 1$ ✓
- **Conséquence :** 12 est bien le plus petit rang ✓

Réponse. $n = 12$, avec $u_{12} \approx 4024,39$ €.

Correction de l'exercice 7 - Franchir un seuil vers le bas

- **Inéquation :** $5000 \times 0,85^n \leq 1000$ ✓
- **Division par 5000 :** $0,85^n \leq 0,2$ ✓
- **Test pour $n = 8$:** $\approx 0,2725$ ✓
- **Insuffisant** ✓
- **Test pour $n = 9$:** $\approx 0,2316$ ✓
- **Toujours insuffisant** ✓
- **Test pour $n = 10$:** $\approx 0,1969$ ✓
- **Objectif atteint** ✓
- **Réponse :**

$$n = 10$$
- **Stock correspondant :** $5000 \times 0,1969$ ✓
- **Valeur :** $\approx 984,37$ pièces ✓
- **Stock au rang 9 :** $\approx 1158,08$ ✓
- **Contrôle :** supérieur à 1000 ✓
- **Conclusion confirmée** ✓
- **Attention au sens de l'inégalité :** la suite **décroît** ✓
- **Conséquence :** une fois le seuil franchi, il le reste ✓
- **Interprétation :** au bout de 10 mois ✓
- **Stock au bout d'un an :** $5000 \times 0,85^{12}$ ✓
- **Valeur :** $\approx 711,21$ pièces ✓

Réponse. $n = 10$, avec $s_{10} \approx 984$ pièces.

Correction de l'exercice 8 – Somme de termes géométriques

- **Nombre de termes** : 10 ✓
- **Formule** : $u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ✓
- Ici $n = 9$, donc l'exposant est 10 ✓
- **Calcul de** $1,05^{10}$: $\approx 1,6289$ ✓
- **Numérateur** : $1 - 1,6289$ ✓
- **Valeur** : $-0,6289$ ✓
- **Dénominateur** : $1 - 1,05$ ✓
- **Valeur** : $-0,05$ ✓
- **Quotient** : $\frac{-0,6289}{-0,05}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 12,5779$ ✓
- **Somme** : $1000 \times 12,5779$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx 12\,577,89$
- **Contrôle de vraisemblance** : 10 termes entre 1000 et 1551 ✓
- **Encadrement** : entre 10 000 et 15 510 ✓
- **Le résultat est dedans** ✓
- **Dernier terme** : $u_9 \approx 1551,33$ ✓
- **Moyenne des termes** : $\approx 1257,79$ ✓
- **Piège** : utiliser la formule arithmétique ✓
- **Ce que cela donnerait** : $10 \times \frac{1000 + 1551,33}{2} \approx 12\,756,65$ ✓
- **Écart** : elle surestime ✓

Réponse. $\approx 12\,577,89$.

Correction de l'exercice 9 – Un placement à intérêts composés

- a) **Raison** : 1,035 ✓
- **Calcul de** $1,035^6$: $\approx 1,2293$ ✓
- **Capital** : $8000 \times 1,2293$ ✓
- **Valeur** :
 $\approx 9834,04$ €
- b) **Différence** : $9834,04 - 8000$ ✓
- **Intérêts** :
 $\approx 1834,04$ €
- **En pourcentage** : $\approx +22,93\%$ ✓
- c) **Intérêts simples annuels** : $8000 \times 0,035$ ✓
- **Valeur** : 280 € ✓
- **Sur 6 ans** : 1680 € ✓
- **Capital final** : 9680 € ✓
- **Écart avec la capitalisation** : $\approx 154,04$ € ✓
- **Explication** : les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts ✓
- **Effet la première année** : identique ✓

- **Effet la sixième année** : $\approx 332,55$ € d'intérêts ✓
- **Contre** : 280 € en simple ✓
- **Écart annuel croissant** ✓
- **Sur 20 ans, capitalisé** : $8000 \times 1,035^{20} \approx 15\,918,31$ € ✓
- **En simple** : $8000 + 5600 = 13\,600$ € ✓
- **Écart** : ≈ 2318 € ✓

Réponse. a) $\approx 9834,04$ € · b) $\approx 1834,04$ € · c) 154,04 € de plus qu'en intérêts simples.

Correction de l'exercice 10 - Une dépréciation

a) **Raison** : $1 - 0,18$ ✓

- **Valeur** : 0,82 ✓
- **Expression** :

$$v_n = 15\,000 \times 0,82^n$$

b) **Calcul de $0,82^3$** : $\approx 0,5514$ ✓

- **Produit** : $15\,000 \times 0,5514$ ✓
- **Valeur** :

$$\approx 8270,52 \text{ €}$$

c) **Condition** : $0,82^n \leq 0,5$ ✓

- **Test pour $n = 3$** : $\approx 0,5514$ ✓
- **Insuffisant** ✓
- **Test pour $n = 4$** : $\approx 0,4521$ ✓
- **Objectif atteint** ✓
- **Réponse** :

$$n = 4 \text{ ans}$$

- **Valeur correspondante** : $\approx 6781,83$ € ✓
- **Contrôle** : la moitié de 15 000 € est 7500 € ✓
- **Comparaison** : $6781,83 < 7500$ ✓
- **Conclusion confirmée** ✓
- **Valeur au bout de 10 ans** : $\approx 2061,72$ € ✓
- **Différence avec un amortissement linéaire sur 6 ans** ✓
- **Perte annuelle linéaire** : 2500 € ✓
- **Valeur linéaire au bout de 3 ans** : 7500 € ✓
- **Comparaison** : la dépréciation en pourcentage est plus rapide au début ✓

Réponse. a) $v_n = 15\,000 \times 0,82^n$ · b) $\approx 8270,52$ € · c) au bout de 4 ans.

Correction de l'exercice 11 - Arithmétique ou géométrique ?

a) **Modèle A** : arithmétique de raison 120 ✓

- **Expression** : $a_n = 1000 + 120n$ ✓
- **Au rang 10** : $1000 + 1200$ ✓
- **Valeur** :

$$a_{10} = 2200$$

— **Modèle B** : géométrique de raison 1,08 ✓

- **Expression** : $b_n = 1000 \times 1,08^n$ ✓

— **Calcul de $1,08^{10}$** : $\approx 2,1589$ ✓

— **Valeur** :

$$b_{10} \approx 2158,92$$

b) **Comparaison au rang 10** : $2200 > 2158,92$ ✓

— **A est encore devant** ✓

— **Au rang 5, A** : 1600 ✓

— **Au rang 5, B** : $\approx 1469,33$ ✓

— **A est devant aussi** ✓

— **Au rang 15, A** : 2800 ✓

— **Au rang 15, B** : $\approx 3172,17$ ✓

— **B est passé devant** ✓

— **Rang de croisement** : entre 10 et 15 ✓

— **Test au rang 12, A** : 2440 ✓

— **Test au rang 12, B** : $\approx 2518,17$ ✓

— **B est déjà devant** ✓

— **Test au rang 11, A** : 2320 ✓

— **Test au rang 11, B** : $\approx 2331,64$ ✓

— **B est devant** ✓

— **Croisement** : au rang 11 ✓

— **Règle** : une croissance géométrique finit **toujours** par dépasser une arithmétique ✓

Réponse. a) 2200 et $\approx 2158,92$ · b) A est devant jusqu'au rang 10, B prend l'avantage au rang 11.

Correction de l'exercice 12 - Repérer une erreur

— **Erreur** : il multiplie par 8 ✓

— **Ce qu'il fallait** : élever à la puissance 8 ✓

— **Formule correcte** : $u_8 = u_0 \times 1,05^8$ ✓

— **Calcul de $1,05^8$** : $\approx 1,4775$ ✓

— **Ce que donne sa formule** : $u_0 \times 8,4$ ✓

— **Écart** : considérable ✓

— **Interprétation de son résultat** : un capital multiplié par 8,4 ✓

— **Absurdité** : cela ferait +740 % ✓

— **Interprétation correcte** : $\approx +47,75\%$ ✓

— **Sur 10 000 €, correct** : $\approx 14\,774,55$ € ✓

— **Sur 10 000 €, sa formule** : 84 000 € ✓

— **Contrôle année par année, an 1** : 10 500 € ✓

— **An 2** : 11 025 € ✓

— **An 3** : $\approx 11\,576,25$ € ✓

— **On est loin de 84 000 €** ✓

— **Origine de la confusion** : le modèle arithmétique ✓

— **Là, on ajoute 8 fois la raison** ✓

— **Ici, on multiplie 8 fois par la raison** ✓

— **Réflexe** : pourcentage $\Rightarrow$ puissance ✓

Réponse. $u_8 = u_0 \times 1,05^8 \approx 1,4775 u_0$, pas $u_0 \times 8,4$.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver un taux moyen

- **Coefficient global** : 1,5 ✓
- **Relation** : $q^6 = 1,5$ ✓
- **Exposant à utiliser** : $\frac{1}{6}$ ✓
- **Calcul** : $1,5^{\frac{1}{6}}$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,0699$ ✓
- **Taux** :
 $\approx +6,99\%$
- **Vérification** : $1,0699^6$ ✓
- **Valeur** : $\approx 1,4999$ ✓
- **Concordance à l'arrondi près** ✓
- **Piège** : $\frac{50}{6} \approx 8,33\%$ ✓
- **Contrôle** : $1,0833^6 \approx 1,6162$ ✓
- **Écart** : trop élevé ✓
- **Application à une valeur de 400** : $400 \times 1,5 = 600$ ✓
- **Contrôle par le taux moyen** : $400 \times 1,0699^6$ ✓
- **Valeur** : ≈ 600 ✓
- **Concordance** ✓
- **Termes intermédiaires** : $\approx 427,96$; $\approx 457,87$ ✓
- **Puis** : $\approx 489,88$; $\approx 524,12$; $\approx 560,76$ ✓
- **Enfin** : $\approx 599,96$ ✓
- **Règle** : le taux moyen est la racine n -ième du coefficient global ✓

Réponse. $\approx +6,99\%$ par période.

Correction de l'exercice 14 - Une épargne régulière

- **Premier versement** : capitalisé 8 ans ✓
- **Sa valeur** : $2400 \times 1,04^8$ ✓
- **Deuxième versement** : $2400 \times 1,04^7$ ✓
- **Dernier versement** : $2400 \times 1,04$ ✓
- **Somme à calculer** : $2400 \times (1,04 + 1,04^2 + \dots + 1,04^8)$ ✓
- **Nature de la parenthèse** : somme géométrique ✓
- **Premier terme** : 1,04 ✓
- **Raison** : 1,04 ✓
- **Nombre de termes** : 8 ✓
- **Formule** : $1,04 \times \frac{1 - 1,04^8}{1 - 1,04}$ ✓
- **Calcul de $1,04^8$** : $\approx 1,3686$ ✓
- **Numérateur** : $-0,3686$ ✓
- **Dénominateur** : $-0,04$ ✓
- **Quotient** : $\approx 9,2142$ ✓
- **Multiplié par 1,04** : $\approx 9,5828$ ✓
- **Capital** : $2400 \times 9,5828$ ✓
- **Valeur** :

$$\approx 22\,998,71 \text{ €}$$

- **Total versé** : $8 \times 2400 = 19\,200 \text{ €}$ ✓
- **Intérêts gagnés** : $\approx 3798,71 \text{ €}$ ✓

Réponse. $\approx 22\,999 \text{ €}$, pour $19\,200 \text{ €}$ versés.

Correction de l'exercice 15 - Un abonnement qui s'érode

a) **Raison** : $0,88$ ✓

- **Expression** : $a_n = 80\,000 \times 0,88^n$ ✓
- **Calcul de $0,88^4$** : $\approx 0,5997$ ✓
- **Produit** : $80\,000 \times 0,5997$ ✓
- **Valeur** :

$$\approx 47\,976 \text{ abonnés}$$

- **Perte** : $\approx 32\,024$ abonnés ✓

b) **Condition** : $0,88^n \leq 0,5$ ✓

- **Test pour $n = 4$** : $\approx 0,5997$ ✓
- **Insuffisant** ✓
- **Test pour $n = 5$** : $\approx 0,5277$ ✓
- **Toujours insuffisant** ✓
- **Test pour $n = 6$** : $\approx 0,4644$ ✓
- **Objectif atteint** ✓
- **Réponse** :

$$n = 6 \text{ ans}$$

- **Abonnés correspondants** : $\approx 37\,152$ ✓
- **Au rang 5** : $\approx 42\,219$ ✓
- **Contrôle** : supérieur à $40\,000$ ✓
- **Conclusion confirmée** ✓
- **Estimation par la règle des 70** : $\frac{70}{12} \approx 5,8$ ✓
- **Concordance avec 6 ans** ✓
- **Recrutements annuels nécessaires pour stabiliser** : 12% du parc ✓

Réponse. a) $\approx 47\,976$ abonnés · b) au bout de 6 ans.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un marché en croissance

a) **Raison** : $1,07$ ✓

- **Expression** :

$$m_n = 600 \times 1,07^n$$

- **Calcul de $1,07^5$** : $\approx 1,40255$ ✓
- **Produit** : $600 \times 1,40255$ ✓
- **Valeur** :

$$m_5 \approx 841,53 \text{ M€}$$

b) **Condition** : $1,07^n \geq \frac{1000}{600}$ ✓

- **Quotient** : $\approx 1,6667$ ✓

- **Test pour $n = 7$:** $\approx 1,6058$ ✓
- **Insuffisant** ✓
- **Test pour $n = 8$:** $\approx 1,7182$ ✓
- **Objectif atteint** ✓
- **Réponse :**

$$n = 8 \text{ ans}$$

- **Valeur correspondante :** $\approx 1030,91$ M€ ✓

c) **Nombre de termes :** 5 ✓

- **Formule :** $600 \times \frac{1 - 1,07^5}{1 - 1,07}$ ✓
- **Numérateur :** $1 - 1,40255$ ✓
- **Valeur :** $\approx -0,40255$ ✓
- **Dénominateur :** $-0,07$ ✓
- **Quotient :** $\approx 5,7507$ ✓
- **Cumul :** $600 \times 5,7507$ ✓
- **Valeur :**

$$\approx 3450,42 \text{ M€}$$

- **Moyenne annuelle :** $\approx 690,09$ M€ ✓

Réponse. a) $m_n = 600 \times 1,07^n$, $m_5 \approx 841,53$ M€ · b) 8 ans · c) $\approx 3450,42$ M€.