Plaquette 3 – Suites géométriques et pourcentages

Suites numériques et modèles — Terminale STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. (u_n) est géométrique de raison q si $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout n.

Pourcentage et raison. Une hausse de $t\,\%$ donne $q = 1 + \dfrac{t}{100}$; une baisse de $t\,\%$ donne $q = 1 - \dfrac{t}{100}$.

Terme général. $u_n = u_0 \times q^n$, et $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Sens de variation (termes positifs). Croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.

Somme de termes consécutifs ($q \neq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

soit premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

Seuil. On calcule les termes jusqu'à franchir la valeur visée, ou l'on résout $q^n > c$ avec le logarithme décimal.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une suite géométrique

On calcule les quotients entre termes consécutifs : ils doivent être tous égaux.

a) $\dfrac{12}{3} = \dfrac{48}{12} = \dfrac{192}{48} = 4$: géométrique de raison $q = 4$.

b) $\dfrac{90}{100} = \dfrac{81}{90} = \dfrac{72{,}9}{81} = 0{,}9$: géométrique de raison 0,9, soit une baisse de 10 % à chaque étape.

c) Les quotients valent 2, puis 1,5 : pas géométrique. Les différences valent toutes 5 :

$$10 - 5 = 15 - 10 = 20 - 15 = 5$$

c'est une suite arithmétique.

Réponse. a) oui, $q = 4$ — b) oui, $q = 0{,}9$ — c) non (arithmétique de raison 5).

Correction de l'exercice 2 – Du pourcentage à la raison

Augmenter de $t\,\%$, c'est multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$; diminuer de $t\,\%$, c'est multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

a) $q = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

b) $q = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

c) $q = 1 + 0{,}035 = 1{,}035$ (raison mensuelle).

d) La raison trimestrielle vaut

$$q = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$$

La période de la suite est celle du pourcentage : par an, par mois ou par trimestre.

Réponse. a) 1,06 — b) 0,85 — c) 1,035 — d) 0,976.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Terme général et calculs

a) Chaque année, le capital est multiplié par 1,06 : (u_n) est géométrique de premier terme 2000 et de raison 1,06, donc

$$u_n = 2000 \times 1{,}06^n$$

b) $u_5 = 2000 \times 1{,}06^5 \approx 2676{,}45$ € et $u_{10} = 2000 \times 1{,}06^{10} \approx 3581{,}70$ €.

En dix ans, le capital a augmenté d’environ 79 %, bien plus que $10 \times 6 = 60$ % : les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts.

Réponse. a) $u_n = 2000 \times 1{,}06^n$ — b) $\approx 2676{,}45$ € et $\approx 3581{,}70$ €.

Correction de l’exercice 4 – Une suite décroissante

a) Diminuer de 15 %, c’est multiplier par 0,85 : $s_n = 5000 \times 0{,}85^n$.

b) $s_5 = 5000 \times 0{,}85^5 \approx 2219$ pièces.

c) Non : un produit de nombres strictement positifs n’est jamais nul. Le stock devient aussi petit que l’on veut, sans jamais atteindre 0 :

$$s_{30} = 5000 \times 0{,}85^{30} \approx 38$$

Dans la réalité, le stock s’annulera dès qu’il restera moins d’une pièce : le modèle n’est valable qu’à grande échelle.

Réponse. a) $s_n = 5000 \times 0{,}85^n$ — b) ≈ 2219 pièces — c) non, il diminue sans jamais s’annuler.

Correction de l’exercice 5 – Deux termes connus

a) Entre les rangs 2 et 5, on multiplie trois fois par q :

$$q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{2488{,}32}{1440} = 1{,}728 \Longrightarrow q = 1{,}728^{\frac{1}{3}} = 1{,}2$$

b) On remonte de deux rangs en divisant : $u_0 = \dfrac{1440}{1{,}2^2} = \dfrac{1440}{1{,}44} = 1000$.

c) $q = 1{,}2$ correspond à une hausse de 20 % par période.

Réponse. a) $q = 1{,}2$ — b) $u_0 = 1000$ — c) +20 % par période.

Correction de l’exercice 6 – Franchir un seuil vers le haut

On cherche le plus petit n tel que $1{,}06^n \geq 2$. Avec le logarithme décimal :

$$n \geq \frac{\log(2)}{\log(1{,}06)} \approx 11{,}9$$

donc $n = 12$.

On vérifie de part et d’autre : $u_{11} \approx 3796{,}60$ € et $u_{12} \approx 4024{,}39$ €. Un algorithme de seuil (boucle « tant que $u \leq 4000$ ») donnerait le même résultat en calculant les termes un par un.

Réponse. $n = 12$, avec $u_{12} \approx 4024{,}39$ €.

Correction de l’exercice 7 – Franchir un seuil vers le bas

On cherche le plus petit n tel que $0{,}85^n \leq 0{,}2$. Comme $\log(0{,}85) < 0$, le sens change en divisant :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$n \geq \frac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}85)} \approx 9{,}9$$

donc $n = 10$.

Vérification : $s_9 \approx 1158$ pièces et $s_{10} \approx 984$ pièces. Le stock passe sous 1000 pièces au bout de 10 mois.

Réponse. $n = 10$, avec $s_{10} \approx 984$ pièces.

Correction de l’exercice 8 – Somme de termes géométriques

La somme compte 10 termes, de premier terme 1000 et de raison 1,05 :

$$\sum_{k=0}^{9} u_k = 1000 \times \frac{1 - 1{,}05^{10}}{1 - 1{,}05} = 1000 \times \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} \approx 12\,577{,}89$$

Contrôle d’ordre de grandeur : dix termes compris entre 1000 et $u_9 \approx 1551$; leur somme doit être entre 10 000 et 15 510.

Réponse. $\approx 12\,577{,}89$.

Correction de l’exercice 9 – Un placement à intérêts composés

a) Le capital vaut $8000 \times 1{,}035^6 \approx 9834{,}04$ €.

b) Les intérêts valent $9834{,}04 - 8000 = 1834{,}04$ €.

c) À intérêts simples, chaque année rapporte 3,5 % de 8000, soit 280 €, et en six ans :

$$6 \times 280 = 1680 \text{ €}$$

Les intérêts composés rapportent 154,04 € de plus : à partir de la deuxième année, les intérêts sont calculés sur un capital plus grand.

Réponse. a) $\approx 9834{,}04$ € — b) $\approx 1834{,}04$ € — c) 154,04 € de plus qu’à intérêts simples.

Correction de l’exercice 10 – Une dépréciation

a) $v_n = 15\,000 \times 0{,}82^n$.

b) $v_3 = 15\,000 \times 0{,}82^3 \approx 8270{,}52$ €.

c) On cherche le plus petit n tel que $0{,}82^n < 0{,}5$:

$$n > \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}82)} \approx 3{,}49$$

donc au bout de 4 ans. Vérification : $v_3 \approx 8270{,}52$ € (55 % du prix) et $v_4 \approx 6781{,}83$ € (45 %).

Réponse. a) $v_n = 15\,000 \times 0{,}82^n$ — b) $\approx 8270{,}52$ € — c) au bout de 4 ans.

Correction de l’exercice 11 – Arithmétique ou géométrique ?

a) Modèle A : $a_n = 1000 + 120n$, donc $a_{10} = 2200$ et $a_{11} = 2320$. Modèle B : $b_n = 1000 \times 1{,}08^n$, donc

$$b_{10} \approx 2158{,}92 \qquad b_{11} \approx 2331{,}64$$

b) A reste devant jusqu’au rang 10, mais B passe devant au rang 11. Le modèle A ajoute toujours 120 ; le modèle B ajoute 8 % d’une valeur qui grandit, donc de plus en plus : une croissance exponentielle finit toujours par dépasser une croissance linéaire.

Réponse. a) 2200 et $\approx 2158{,}92$; 2320 et $\approx 2331{,}64$ — b) B dépasse A au rang 11.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Repérer une erreur

Huit hausses successives de 5 % correspondent à huit multiplications par 1,05, c’est-à-dire à une puissance :

$$u_8 = u_0 \times 1{,}05^8 \approx 1{,}4775\, u_0$$

L’élève obtient $u_0 \times 8{,}4$: un capital multiplié par plus de 8 en huit ans à 5 %, ce qui est absurde. Le bon résultat correspond à une hausse globale d’environ 47,75 %.

Réponse. $u_8 = u_0 \times 1{,}05^8 \approx 1{,}4775\, u_0$.

Correction de l’exercice 13 – Retrouver un taux moyen

On note q le coefficient par période. Six périodes donnent le coefficient global 1,5 :

$$q^6 = 1{,}5 \Leftrightarrow q = 1{,}5^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}0699$$

Le taux par période est d’environ +6,99 %.

L’erreur classique serait de diviser : $\dfrac{50}{6} \approx 8{,}33\,\%$, qui surestime le taux, car les hausses se composent.

Réponse. ≈ +6,99 % par période.

Correction de l’exercice 14 – Une épargne régulière

Le capital est la somme des huit versements augmentés de leurs intérêts :

$$C = 2400 \times 1{,}04 + 2400 \times 1{,}04^2 + \cdots + 2400 \times 1{,}04^8$$

C’est une somme de 8 termes d’une suite géométrique de premier terme $2400 \times 1{,}04 = 2496$ et de raison 1,04 :

$$C = 2496 \times \frac{1{,}04^8 - 1}{0{,}04} \approx 22\,999\ €$$

pour $8 \times 2400 = 19\,200$ € versés, soit environ 3800 € d’intérêts.

Réponse. ≈ 22 999 €, pour 19 200 € versés.

Correction de l’exercice 15 – Un abonnement qui s’érode

a) $a_n = 80\,000 \times 0{,}88^n$, donc $a_4 \approx 47\,976$ abonnés.

b) On cherche le plus petit n tel que $0{,}88^n < 0{,}5$; le sens change car $\log(0{,}88) < 0$:

$$n > \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}88)} \approx 5{,}42$$

donc au bout de 6 ans. Vérification : $a_5 \approx 42\,219$ et $a_6 \approx 37\,152$.

Réponse. a) ≈ 47 976 abonnés — b) au bout de 6 ans.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un marché en croissance

a) $m_n = 600 \times 1{,}07^n$ et $m_5 \approx 841{,}53$ M€.

b) $1{,}07^n > \dfrac{1000}{600}$ donne $n > \dfrac{\log(1000/600)}{\log(1{,}07)} \approx 7{,}55$: au bout de 8 ans ($m_7 \approx 963{,}47$ et $m_8 \approx 1030{,}91$).

c) Cinq termes de raison 1,07 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sum_{k=0}^{4} m_k = 600 \times \frac{1{,}07^5 - 1}{0{,}07} \approx 3450{,}44$$

Le marché cumule environ 3450 M€ sur les cinq premières années.

Réponse. a) $m_n = 600 \times 1{,}07^n$, $m_5 \approx 841{,}53$ M€ — b) 8 ans — c) $\approx 3450{,}44$ M€.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).