Plaquette 3 – Boucles et figures géométriques

Algorithmique et Scratch — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La formule du polygone régulier. Pour tracer un polygone à n côtés, on répète n fois « avancer, tourner » avec

$$\text{angle de rotation} = \frac{360}{n}$$

Polygone	n	Angle de rotation
triangle équilatéral	3	120°
carré	4	90°
pentagone	5	72°
hexagone	6	60°
octogone	8	45°
décagone	10	36°

Pourquoi 360 **?** À la fin du tracé, le lutin a fait un tour complet sur lui-même et retrouve sa direction initiale : la figure est fermée.

Angle de rotation et angle intérieur. Ils sont **supplémentaires** :

$$\text{angle intérieur} = 180 - \frac{360}{n}$$

Retrouver n à partir de l'angle.

$$n = \frac{360}{\text{angle de rotation}}$$

Si le quotient n'est pas entier, la figure ne se referme pas après un tour.

Boucles imbriquées. Une boucle dans une boucle : le bloc intérieur est exécuté (nombre extérieur) × (nombre intérieur) fois. C'est le principe des rosaces.

Périmètre. Pour un polygone régulier de n côtés de longueur c :

$$P = n \times c$$

Contrôle systématique. On vérifie que le produit du nombre de répétitions par l'angle de rotation vaut 360 (ou un multiple de 360 pour une étoile).

Correction de l'exercice 1 – Un triangle équilatéral

Pour tracer un polygone régulier, le lutin fait un tour complet (360°) en autant de rotations égales qu'il y a de côtés. Pour un triangle, il tourne donc de

$$360 \div 3 = 120°$$

à chaque sommet. Le script est : « stylo en position d'écriture », puis répéter 3 fois « avancer de 90 pas, tourner de 120 degrés ».

Le périmètre vaut $3 \times 90 = 270$ pas. **Attention** : le lutin tourne de 120°, l'angle **extérieur** ; l'angle intérieur du triangle vaut $180 - 120 = 60°$, comme il se doit pour un triangle équilatéral. Tourner de 60 degrés à chaque fois tracerait un hexagone.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Répéter 3 fois « avancer de 90, tourner de 120 degrés » ; périmètre 270 pas.

Correction de l’exercice 2 – Un hexagone

Le lutin répète 6 fois « avancer de 70 pas, tourner de 60 degrés ». Il tourne au total de $6 \times 60 = 360°$, un tour complet : la figure se referme. Elle a 6 côtés égaux et des angles égaux :

un hexagone régulier de côté 70 pas

Son périmètre vaut $6 \times 70 = 420$ pas. Chaque angle intérieur mesure $180 - 60 = 120°$, et l’on vérifie que la somme des angles d’un hexagone vaut bien $6 \times 120 = 720°$.

Réponse. Un hexagone régulier de côté 70 pas, de périmètre 420.

Correction de l’exercice 3 – Retrouver le nombre de côtés

a) La figure se referme quand le lutin a fait exactement un tour, c’est-à-dire quand la somme des rotations vaut 360° :

$$40n = 360 \quad \text{donc} \quad n = 9$$

b) On obtient un polygone régulier à 9 côtés de 50 pas (un ennéagone), de périmètre $9 \times 50 = 450$ pas. Chaque angle intérieur mesure $180 - 40 = 140°$.

Avec $n = 5$, le lutin n’aurait tourné que de 200° : la figure resterait ouverte. Avec $n = 18$, il ferait deux tours et repasserait sur la même figure.

Réponse. a) $n = 9$ · b) un ennéagone régulier de périmètre 450 pas.

Correction de l’exercice 4 – Un angle impossible

a) Pour faire un tour complet en rotations de 50°, il faudrait $360 \div 50 = 7{,}2$ répétitions : ce n’est pas un nombre entier.

b) Après 7 répétitions, le lutin n’a tourné que de 350° : la figure ne se referme pas. Il faut continuer jusqu’à ce que le total des rotations soit un multiple de 360, c’est-à-dire un multiple commun de 50 et de 360. Le plus petit est 1800 :

$$1800 \div 50 = 36 \text{ répétitions} \qquad 1800 \div 360 = 5 \text{ tours}$$

La figure ne se referme qu’après 36 côtés et 5 tours complets : les segments se croisent et dessinent une étoile. Pour un polygone simple, l’angle doit diviser 360 (30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120…).

Réponse. a) 7,2, non entier · b) la figure ne se referme qu’après 36 répétitions et 5 tours, en formant une étoile.

Correction de l’exercice 5 – Une étoile à cinq branches

a) Le lutin tourne au total de $5 \times 144 = 720°$. Comme $720 = 2 \times 360$, il retrouve sa direction de départ, et après 5 côtés égaux il revient à son point de départ : la figure se referme.

b) Il a fait

$$720 \div 360 = 2 \text{ tours}$$

C’est pour cela que les segments se croisent et dessinent une étoile à cinq branches, au lieu d’un pentagone (pour lequel il faudrait tourner de 72°, en un seul tour). Comme $144 = 2 \times 72$, l’étoile relie les sommets d’un pentagone un sur deux. La longueur tracée vaut $5 \times 120 = 600$ pas.

Réponse. a) $5 \times 144 = 720 = 2 \times 360$ · b) deux tours.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Boucles imbriquées

La boucle intérieure tourne de $4 \times 90 = 360°$: elle trace un carré de 60 pas de côté et ramène le lutin à son point de départ, dans sa direction initiale. La boucle extérieure répète ce carré 4 fois, en tournant le lutin d’un quart de tour avant chaque nouveau carré :

$$4 \times 4 = 16 \text{ segments}$$

Comme chaque carré part du même point mais dans une direction tournée de 90°, les quatre carrés sont **accolés** autour de ce point : on obtient un grand carré de 120 pas de côté, partagé en quatre petits carrés par une croix.

Le lutin parcourt $16 \times 60 = 960$ pas, mais les deux segments de la croix sont tracés deux fois : la longueur visible vaut $4 \times 120 + 2 \times 120 = 720$ pas.

Réponse. 16 segments : quatre carrés accolés autour du point de départ, qui forment un grand carré de 120 pas partagé en quatre.

Correction de l’exercice 7 – Une rosace

a) La boucle intérieure tourne de $3 \times 120 = 360°$ et trace 3 côtés égaux : c’est un triangle équilatéral de côté 80 pas, qui ramène le lutin à son point de départ.

b) La boucle extérieure le répète 8 fois, en tournant de 45° entre deux triangles. Comme $8 \times 45 = 360$, les triangles sont répartis régulièrement sur un tour complet :

$$8 \text{ triangles}$$

c) Chaque triangle comporte 3 segments, soit $8 \times 3 = 24$ segments, et une longueur tracée de $24 \times 80 = 1920$ pas. En général, le nombre de motifs d’une rosace vaut 360 divisé par l’angle de la boucle extérieure (6 triangles avec 60°, par exemple).

Réponse. a) un triangle équilatéral de côté 80 · b) 8 triangles · c) 24 segments.

Correction de l’exercice 8 – Un escalier

a) À chaque passage, l’abscisse augmente de 40 et l’ordonnée de 30. Après 6 passages, en partant de $(-150\,;-100)$:

$$x = -150 + 6 \times 40 = 90 \qquad y = -100 + 6 \times 30 = 80$$

Le lutin finit en $(90\,;80)$.

b) La hauteur gravie est la variation totale d’ordonnée : $6 \times 30 = 180$ pas.

Remarque : en 240 pas vers la droite, le lutin monte de 180 pas. La distance en ligne droite entre le départ et l’arrivée vaut $\sqrt{240^2 + 180^2} = \sqrt{90\,000} = 300$ pas, d’après le théorème de Pythagore.

Réponse. a) $(90\,;80)$ · b) 180 pas.

Correction de l’exercice 9 – Une spirale

a) La variable c vaut 10 au départ et augmente de 20 après chaque côté tracé. Les côtés mesurent donc successivement

$$10 \quad 30 \quad 50 \quad 70 \quad 90 \text{ pas}$$

(on ajoute 20 après avoir avancé, donc le premier côté mesure bien 10).

b) La longueur totale est la somme : en regroupant les extrêmes,
$(10 + 90) + (30 + 70) + 50 = 250$ pas. On peut aussi remarquer que la longueur moyenne vaut $\dfrac{10 + 90}{2} = 50$, et $5 \times 50 = 250$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

À la fin, c vaut 110, mais cette valeur n'a servi à tracer aucun côté.

Réponse. a) 10, 30, 50, 70, 90 · b) 250 pas.

Correction de l'exercice 10 – Un cercle approché

a) Le lutin tourne de 1° à chaque passage, 360 fois : au total, $360 \times 1 = 360°$, exactement un tour. Il revient à son point de départ avec sa direction initiale, et la figure est fermée. C'est en réalité un polygone régulier à 360 côtés, si petits qu'il ressemble à un cercle.

b) Le périmètre vaut $360 \times 2 = 720$ pas. En assimilant la figure à un cercle de périmètre $2\pi r$:

$$r = \frac{720}{2\pi} \approx 114{,}6 \text{ pas}$$

Le diamètre, environ 229 pas, tient largement dans la scène, qui mesure 480 pas de large. En avançant de 1 pas au lieu de 2, on obtiendrait un « cercle » de rayon deux fois plus petit.

Réponse. a) $360 \times 1 = 360°$ · b) périmètre 720 pas, rayon $\approx 114{,}6$ pas.

Correction de l'exercice 11 – Corriger un polygone

Le lutin tourne au total de $8 \times 60 = 480°$, plus qu'un tour : la figure ne se referme pas en octogone. Pour un octogone régulier, il faut faire un tour complet en 8 rotations égales, de

$$360 \div 8 = 45°$$

On remplace donc « tourner de 60 degrés » par « tourner de 45 degrés ». Le script répète alors 8 fois « avancer de 50 pas, tourner de 45 degrés », et $8 \times 45 = 360$.

L'octogone a un périmètre de $8 \times 50 = 400$ pas et des angles intérieurs de $180 - 45 = 135°$. Garder 60° en répétant 6 fois tracerait un hexagone, pas un octogone.

Réponse. Remplacer « tourner de 60 degrés » par « tourner de 45 degrés ».

Correction de l'exercice 12 – Comparer deux polygones

a) Pour un polygone régulier à n côtés, l'angle de rotation vaut $360 \div n$:

$$\text{pentagone} : 360 \div 5 = 72° \qquad \text{décagone} : 360 \div 10 = 36°$$

Le décagone ayant deux fois plus de côtés, son angle de rotation est deux fois plus petit.

b) Le périmètre du pentagone vaut $5 \times 80 = 400$ pas, celui du décagone $10 \times 40 = 400$ pas : ils sont **égaux**. Les deux figures sont pourtant différentes : le décagone, avec ses angles intérieurs de 144° (contre 108° pour le pentagone), est plus proche d'un cercle, et c'est lui qui a la plus grande aire.

Réponse. a) 72° et 36° · b) même périmètre, 400 pas.

Correction de l'exercice 13 – Un motif répété

a) La boucle intérieure tourne de $4 \times 90 = 360°$ en traçant 4 côtés de 40 pas : c'est un carré de côté 40.

b) La boucle extérieure répète ce carré 5 fois, en décalant le lutin de 60 pas vers la droite entre deux carrés. Comme $60 > 40$, les carrés ne se touchent pas : l'écart entre deux carrés vaut

$$60 - 40 = 20 \text{ pas}$$

c) Le lutin part de l'abscisse -200 et subit 5 décalages de 60 : $-200 + 5 \times 60 = 100$. Il

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

finit en $(100\,;0)$. Le dernier carré a été tracé à partir de l'abscisse $-200+4\times60=40$; la frise tient donc sur la scène.

Réponse. a) un carré de côté 40 · b) 5 carrés espacés de 20 pas · c) le lutin finit en $(100\,;0)$.

Correction de l'exercice 14 – Calculer l'angle intérieur

Pour un polygone régulier à n côtés, le lutin tourne de $\dfrac{360}{n}$ degrés à chaque sommet ; l'angle intérieur est le supplémentaire de cette rotation :

$$\text{angle intérieur} = 180 - \frac{360}{n}$$

a) 12 côtés : rotation 30°, angle intérieur 150°.

b) 18 côtés : rotation 20°, angle intérieur 160°.

c) 20 côtés : rotation 18°, angle intérieur 162°.

Contrôle pour a) : la somme des angles d'un polygone à 12 côtés vaut $(12-2)\times180=1800°$, et $12\times150=1800$. Plus il y a de côtés, plus l'angle intérieur se rapproche de 180°.

Réponse. a) 30° et 150° · b) 20° et 160° · c) 18° et 162°.

Correction de l'exercice 15 – Un triangle rectangle

On trace les deux côtés de l'angle droit le long des axes, puis on revient au départ :

```
aller à x: 0 y: 0
```

```
stylo en position d'écriture
aller à x: 120 y: 0
aller à x: 0 y: 90
aller à x: 0 y: 0
```

Le premier segment est horizontal (120 pas), le dernier vertical (90 pas) : l'angle droit est à l'origine. D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse vérifie

$$120^2+90^2=14\,400+8100=22\,500=150^2$$

Elle mesure 150 pas, et le périmètre vaut $90+120+150=360$ pas.

Réponse. Hypoténuse 150 pas, périmètre 360 pas.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : trois figures

a) Un carré : rotation de $360\div4=90°$. Script : répéter 4 fois « avancer de 110 pas, tourner de 90 degrés ». Périmètre : $4\times110=440$ pas.

b) Un dodécagone régulier (12 côtés) : rotation de $360\div12=30°$. Script : répéter 12 fois « avancer de 35 pas, tourner de 30 degrés ». Périmètre : $12\times35=420$ pas.

c) Script : répéter 8 fois « avancer de 90 pas, tourner de 135 degrés ». La rotation totale vaut

$$8\times135=1080°=3\times360°$$

La figure se referme après trois tours : c'est une étoile à huit branches, de longueur totale $8\times90=720$ pas.

Réponse. a) 440 pas · b) 420 pas · c) 720 pas (trois tours).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).