Plaquette 1 – Diviseurs, nombres premiers et PGCD

Arithmétique — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et méthodes du cours.

— b est un **diviseur** de a (ou a est un multiple de b) s'il existe un entier k tel que $a = b \times k$.

— Critères de divisibilité : par 2 si le chiffre des unités est pair ; par 3 si la somme des chiffres est divisible par 3 ; par 5 si le nombre finit par 0 ou 5 ; par 9 si la somme des chiffres est divisible par 9.

— Un nombre **premier** a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

— **Décomposition en facteurs premiers** : on divise successivement par 2, 3, 5, 7, … Exemple :

$$180 = 2 \times 90 = 2^2 \times 45 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

— **PGCD** : le plus grand diviseur commun. On l'obtient en comparant les listes de diviseurs, ou par la décomposition : produit des facteurs premiers communs, chacun avec son plus petit exposant.

— Deux nombres sont **premiers entre eux** si leur PGCD vaut 1.

— Fraction **irréductible** : on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

Correction de l'exercice 1 – Utiliser les critères de divisibilité

On applique les critères du cours.

— Par 2 : le chiffre des unités est 0, qui est pair. **Oui** ($2\,340 = 2 \times 1\,170$).

— Par 3 : somme des chiffres $2 + 3 + 4 + 0 = 9$, divisible par 3. **Oui** ($2\,340 = 3 \times 780$).

— Par 5 : le nombre finit par 0. **Oui** ($2\,340 = 5 \times 468$).

— Par 9 : la somme des chiffres vaut 9, divisible par 9. **Oui** ($2\,340 = 9 \times 260$).

Réponse. Divisible par 2, 3, 5 et 9.

Correction de l'exercice 2 – Lister les diviseurs

Méthode : on essaie 1, 2, 3, … et on note les diviseurs **par paires** ; on s'arrête quand les deux facteurs se croisent.

— $60 = 1 \times 60$; 2×30 ; 3×20 ; 4×15 ; 5×12 ; 6×10.

— 7, 8 et 9 ne divisent pas 60, et $\sqrt{60} \approx 7{,}7$: on peut s'arrêter.

— Liste des diviseurs : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 — soit 12 diviseurs.

Réponse. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Correction de l'exercice 3 – Reconnaître un nombre premier

Un nombre est premier s'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée. Ici $\sqrt{59} \approx 7{,}7$: il suffit de tester 2, 3, 5 et 7.

— 51 : la somme des chiffres est 6, donc 51 est divisible par 3 ($51 = 3 \times 17$). **Non premier.**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— 53 : impair, somme des chiffres 8 (pas divisible par 3), ne finit pas par 0 ou 5, et $53 = 7 \times 7 + 4$. **Premier.**
— 57 : somme des chiffres 12, divisible par 3 ($57 = 3 \times 19$). **Non premier.**
— 59 : aucun des tests ne réussit ($59 = 7 \times 8 + 3$). **Premier.**

Réponse. 53 et 59 sont premiers.

Correction de l'exercice 4 – Décomposer en facteurs premiers

On divise successivement par les nombres premiers, en commençant par les plus petits.

— $180 = 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 45 = 2^2 \times 3 \times 15 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.
— $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$.
— Contrôle : $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$ et $2^2 \times 3 \times 7 = 4 \times 21 = 84$.

Réponse. $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

Correction de l'exercice 5 – PGCD par la décomposition

Méthode du cours : on garde les facteurs premiers **communs**, chacun avec le plus petit exposant.

— $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.
— Facteurs communs : 2^2 (présent dans les deux) et 3 (exposant 1, le plus petit). Le 5 et le 7 ne sont pas communs.

$$\text{PGCD}(180\,;84) = 2^2 \times 3 = 12$$

— Vérification : $180 = 12 \times 15$ et $84 = 12 \times 7$, et 15 et 7 n'ont plus de diviseur commun.

Réponse. $\text{PGCD}(180\,;84) = 12$.

Correction de l'exercice 6 – Diviseurs communs et PGCD

On cherche les diviseurs par paires, en s'arrêtant quand les deux facteurs se croisent.

— Diviseurs de 36 : 1×36, 2×18, 3×12, 4×9, 6×6, soit 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
— Diviseurs de 48 : 1×48, 2×24, 3×16, 4×12, 6×8, soit 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

Les diviseurs communs sont les nombres présents dans les deux listes : 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Le plus grand est 12.

Contrôle : $36 = 2^2 \times 3^2$ et $48 = 2^4 \times 3$. Les facteurs communs, pris avec le plus petit exposant, donnent

$$2^2 \times 3 = 12$$

On remarque que les diviseurs communs sont exactement les diviseurs de 12.

Réponse. Diviseurs communs : 1, 2, 3, 4, 6, 12 ; le PGCD vaut 12.

Correction de l'exercice 7 – Nombres premiers entre eux

Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD vaut 1.

— $35 = 5 \times 7$ et $54 = 2 \times 3^3$: aucun facteur premier commun, donc PGCD = 1. Ils **sont** premiers entre eux.
— $35 = 5 \times 7$ et $63 = 3^2 \times 7$: le facteur 7 est commun, donc $\text{PGCD}(35\,;63) = 7 \neq 1$. Ils **ne sont pas** premiers entre eux.

Réponse. 35 et 54 : oui · 35 et 63 : non (PGCD = 7).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Rendre une fraction irréductible

Méthode du cours : on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

— PGCD(180 ; 84) = 12, donc

$$\frac{180}{84} = \frac{180 \div 12}{84 \div 12} = \frac{15}{7}$$

— PGCD(252 ; 198) = 18, donc $\frac{252}{198} = \frac{14}{11}$.

— Contrôle : 15 et 7 sont premiers entre eux, $14 = 2 \times 7$ et 11 est premier : les deux fractions sont bien irréductibles.

Réponse. $\frac{15}{7}$ et $\frac{14}{11}$.

Correction de l'exercice 9 – Multiple ou diviseur ?

Pour savoir si b divise a, on cherche un entier k tel que $a = b \times k$, ou l'on effectue la division euclidienne et l'on regarde si le reste est nul.

a) $91 = 7 \times 13$: le quotient est entier, donc **oui**, 7 est un diviseur de 91.

b) $156 = 12 \times 13$: **oui**, 156 est un multiple de 12.

c) La division euclidienne donne

$$2\,500 = 8 \times 312 + 4$$

Le reste vaut 4, il n'est pas nul : **non**, 8 ne divise pas 2 500.

Réponse. a) oui ($91 = 7 \times 13$) · b) oui ($156 = 12 \times 13$) · c) non (reste 4).

Correction de l'exercice 10 – Décomposer un grand nombre

On divise successivement par les plus petits nombres premiers possibles : 1 050 est pair, donc divisible par 2 ; puis 525 finit par 5, etc.

$$1\,050 = 2 \times 525 = 2 \times 3 \times 175 = 2 \times 3 \times 5 \times 35 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$

Les diviseurs premiers de 1 050 sont donc 2, 3, 5 et 7 : il y en a **quatre**.

Contrôle : $2 \times 3 \times 25 \times 7 = 6 \times 175 = 1\,050$.

Réponse. $1\,050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$; quatre diviseurs premiers.

Correction de l'exercice 11 – Simplifier une fraction en une fois

Pour simplifier en une seule étape, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. On décompose :

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7 \qquad 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Les facteurs communs sont 2, 3 et 7 (chacun avec le plus petit exposant), donc PGCD(126 ; 210) $= 2 \times 3 \times 7 = 42$. Alors $\frac{126}{210} = \frac{126 \div 42}{210 \div 42} = \frac{3}{5}$.

Contrôle : 3 et 5 sont premiers entre eux, la fraction obtenue est bien irréductible.

Réponse. $\frac{126}{210} = \frac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 12 – Problème : des sachets de bonbons

a) Le nombre de sachets doit diviser 240 et 180. Pour 15 : $240 = 15 \times 16$ et $180 = 15 \times 12$, donc **oui** (16 fraises et 12 menthes par sachet). Pour 24 : $240 = 24 \times 10$, mais $180 = 24 \times 7 + 12$, donc **non**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Le nombre maximal de sachets est le plus grand diviseur commun de 240 et 180. On décompose :

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \qquad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

Les facteurs communs, avec le plus petit exposant, donnent $2^2 \times 3 \times 5 = 60$. La confiserie peut préparer au plus 60 **sachets**, contenant chacun $240 \div 60 = 4$ bonbons à la fraise et $180 \div 60 = 3$ à la menthe. **Contrôle** : 4 et 3 n'ont aucun diviseur commun autre que 1, on ne peut donc pas faire moins de bonbons par sachet.

Réponse. a) 15 : oui ; 24 : non · b) 60 sachets de 4 fraises et 3 menthes.

Correction de l'exercice 13 – Problème : des bouquets identiques

a) Le nombre de bouquets doit diviser 126 **et** 90 : on cherche le plus grand diviseur commun.

— $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.
— Facteurs communs : $2 \times 3^2 = 18$, donc $\text{PGCD}(126\,;90) = 18$.
— Il peut réaliser 18 **bouquets**.

b) On partage alors chaque type de fleur entre les 18 bouquets.

— Roses : $126 \div 18 = 7$ par bouquet.
— Tulipes : $90 \div 18 = 5$ par bouquet.
— Vérification : $18 \times 7 = 126$ et $18 \times 5 = 90$: toutes les fleurs sont utilisées.

Réponse. a) 18 bouquets · b) 7 roses et 5 tulipes par bouquet.

Correction de l'exercice 14 – Problème : carrelage d'une pièce

a) Le côté de la dalle doit diviser les deux dimensions, et l'on veut le plus grand possible : c'est le plus grand diviseur commun de 360 et 264.

— Décompositions : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $264 = 2^3 \times 3 \times 11$.
— Facteurs communs avec le plus petit exposant : $2^3 \times 3 = 24$.
— La plus grande dalle possible mesure donc 24 cm de côté.

b) On compte les dalles en longueur et en largeur : $360 \div 24 = 15$ dalles et $264 \div 24 = 11$ dalles, soit au total

$$15 \times 11 = 165 \text{ dalles}$$

Contrôle par les aires : $\dfrac{360 \times 264}{24 \times 24} = \dfrac{95\,040}{576} = 165$. Cohérent.

Réponse. a) Dalles de 24 cm de côté · b) 165 dalles.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : vrai ou faux

a) **Faux.** 1 n'a qu'un seul diviseur (lui-même), alors qu'un nombre premier en a exactement deux. Le plus petit nombre premier est 2.

b) **Vrai.** Si $n = 9k$ alors $n = 3 \times (3k)$: n est bien un multiple de 3. (La réciproque est fausse : 6 est divisible par 3 mais pas par 9.)

c) **Faux.** Un diviseur commun de a et b divise a, il est donc au plus égal à a : $\text{PGCD}(a\,;b) \leq a$ et $\leq b$.

d) **Faux.** $51 = 3 \times 17$ et $68 = 2^2 \times 17$: le facteur 17 est commun, donc PGCD = 17 et $\dfrac{51}{68} = \dfrac{3}{4}$.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux · d) faux, $\dfrac{51}{68} = \dfrac{3}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).