

Plaquette 1 – Diviseurs, nombres premiers et PGCD

Arithmétique – Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et méthodes du cours.

- b est un **diviseur** de a (ou a est un multiple de b) s'il existe un entier k tel que $a = b \times k$.
- Critères de divisibilité : par 2 si le chiffre des unités est pair ; par 3 si la somme des chiffres est divisible par 3 ; par 5 si le nombre finit par 0 ou 5 ; par 9 si la somme des chiffres est divisible par 9.
- Un nombre **premier** a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
- **Décomposition en facteurs premiers** : on divise successivement par 2, 3, 5, 7, ... Exemple : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.
- **PGCD** : le plus grand diviseur commun. On l'obtient par la décomposition (produit des facteurs communs) ou par l'**algorithme d'Euclide** : $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$ où r est le reste de a par b , jusqu'à un reste nul.
- Deux nombres sont **premiers entre eux** si leur PGCD vaut 1.
- Fraction **irréductible** : on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

Correction de l'exercice 1 - Utiliser les critères de divisibilité

On applique les critères du cours.

- Par 2 : le chiffre des unités est 0, qui est pair. **Oui** ($2\,340 = 2 \times 1\,170$).
- Par 3 : somme des chiffres $2 + 3 + 4 + 0 = 9$, divisible par 3. **Oui** ($2\,340 = 3 \times 780$).
- Par 5 : le nombre finit par 0. **Oui** ($2\,340 = 5 \times 468$).
- Par 9 : la somme des chiffres vaut 9, divisible par 9. **Oui** ($2\,340 = 9 \times 260$).

Réponse. Divisible par 2, 3, 5 et 9.

Correction de l'exercice 2 - Lister les diviseurs

Méthode : on essaie 1, 2, 3, ... et on note les diviseurs **par paires** ; on s'arrête quand les deux facteurs se croisent.

- $60 = 1 \times 60 ; 2 \times 30 ; 3 \times 20 ; 4 \times 15 ; 5 \times 12 ; 6 \times 10$.
- 7, 8 et 9 ne divisent pas 60, et $\sqrt{60} \approx 7,7$: on peut s'arrêter.
- Liste des diviseurs : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 — soit 12 diviseurs.

Réponse. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Correction de l'exercice 3 - Reconnaître un nombre premier

Un nombre est premier s'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée. Ici $\sqrt{59} \approx 7,7$: il suffit de tester 2, 3, 5 et 7.

- 51 : la somme des chiffres est 6, donc 51 est divisible par 3 ($51 = 3 \times 17$). **Non premier.**
- 53 : impair, somme des chiffres 8 (pas divisible par 3), ne finit pas par 0 ou 5, et $53 = 7 \times 7 + 4$. **Premier.**

- 57 : somme des chiffres 12, divisible par 3 ($57 = 3 \times 19$). **Non premier.**
- 59 : aucun des tests ne réussit ($59 = 7 \times 8 + 3$). **Premier.**

Réponse. 53 et 59 sont premiers.

Correction de l'exercice 4 - Décomposer en facteurs premiers

On divise successivement par les nombres premiers, en commençant par les plus petits.

- $180 = 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 45 = 2^2 \times 3 \times 15 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.
- $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$.
- Contrôle : $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$ et $2^2 \times 3 \times 7 = 4 \times 21 = 84$.

Réponse. $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

Correction de l'exercice 5 - PGCD par la décomposition

Méthode du cours : on garde les facteurs premiers **communs**, chacun avec le plus petit exposant.

- $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.
- Facteurs communs : 2^2 (présent dans les deux) et 3 (exposant 1, le plus petit). Le 5 et le 7 ne sont pas communs.

$$\text{PGCD}(180; 84) = 2^2 \times 3 = 12$$

- Vérification : $180 = 12 \times 15$ et $84 = 12 \times 7$, et 15 et 7 n'ont plus de diviseur commun.

Réponse. $\text{PGCD}(180; 84) = 12$.

Correction de l'exercice 6 - Algorithme d'Euclide

Principe du cours : on remplace $(a; b)$ par $(b; r)$, où r est le reste de la division de a par b , jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD est alors le dernier reste non nul.

- $252 = 198 \times 1 + 54$;
- $198 = 54 \times 3 + 36$;
- $54 = 36 \times 1 + 18$;
- $36 = 18 \times 2 + 0$.
- Le dernier reste non nul est 18, donc $\text{PGCD}(252; 198) = 18$.
- Contrôle par décomposition : $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ et $198 = 2 \times 3^2 \times 11$, d'où un PGCD de $2 \times 3^2 = 18$. Cohérent.

Réponse. $\text{PGCD}(252; 198) = 18$.

Correction de l'exercice 7 - Nombres premiers entre eux

Deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD vaut 1.

- $35 = 5 \times 7$ et $54 = 2 \times 3^3$: aucun facteur premier commun, donc $\text{PGCD} = 1$. Ils **sont** premiers entre eux.
- $35 = 5 \times 7$ et $63 = 3^2 \times 7$: le facteur 7 est commun, donc $\text{PGCD}(35; 63) = 7 \neq 1$. Ils **ne sont pas** premiers entre eux.

Réponse. 35 et 54 : oui · 35 et 63 : non ($\text{PGCD} = 7$).

Correction de l'exercice 8 - Rendre une fraction irréductible

Méthode du cours : on divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

— PGCD(180 ; 84) = 12, donc

$$\frac{180}{84} = \frac{180 \div 12}{84 \div 12} = \frac{15}{7}$$

— PGCD(252 ; 198) = 18, donc $\frac{252}{198} = \frac{14}{11}$.

— Contrôle : 15 et 7 sont premiers entre eux, $14 = 2 \times 7$ et 11 est premier : les deux fractions sont bien irréductibles.

Réponse. $\frac{15}{7}$ et $\frac{14}{11}$.

Correction de l'exercice 9 - Problème : des bouquets identiques

a) Le nombre de bouquets doit diviser 126 **et** 90 : on cherche le plus grand diviseur commun.

— $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$.

— Facteurs communs : $2 \times 3^2 = 18$, donc PGCD(126 ; 90) = 18.

— Il peut réaliser 18 **bouquets**.

b) On partage alors chaque type de fleur entre les 18 bouquets.

— Roses : $126 \div 18 = 7$ par bouquet.

— Tulipes : $90 \div 18 = 5$ par bouquet.

— Vérification : $18 \times 7 = 126$ et $18 \times 5 = 90$: toutes les fleurs sont utilisées.

Réponse. a) 18 bouquets · b) 7 roses et 5 tulipes par bouquet.

Correction de l'exercice 10 - Problème : carrelage d'une pièce

a) Le côté de la dalle doit diviser les deux dimensions : c'est le PGCD.

— Algorithme d'Euclide : $360 = 264 \times 1 + 96$; $264 = 96 \times 2 + 72$; $96 = 72 \times 1 + 24$; $72 = 24 \times 3 + 0$.

— Le dernier reste non nul est 24 : PGCD(360 ; 264) = 24.

— La plus grande dalle possible mesure donc 24 cm de côté.

b) On compte les dalles en longueur et en largeur.

— $360 \div 24 = 15$ dalles et $264 \div 24 = 11$ dalles.

— Total : $15 \times 11 = 165$ dalles.

— Contrôle par les aires : $\frac{360 \times 264}{24 \times 24} = \frac{95\,040}{576} = 165$. Cohérent.

Réponse. a) Dalles de 24 cm de côté · b) 165 dalles.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : vrai ou faux

a) **Faux.** 1 n'a qu'un seul diviseur (lui-même), alors qu'un nombre premier en a exactement deux. Le plus petit nombre premier est 2.

b) **Vrai.** Si $n = 9k$ alors $n = 3 \times (3k)$: n est bien un multiple de 3. (La réciproque est fautive : 6 est divisible par 3 mais pas par 9.)

c) **Faux.** Un diviseur commun de a et b divise a , il est donc au plus égal à a : PGCD(a ; b) $\leq a$ et $\leq b$.

d) **Faux.** $51 = 3 \times 17$ et $68 = 2^2 \times 17$: le facteur 17 est commun, donc PGCD = 17 et $\frac{51}{68} = \frac{3}{4}$.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) faux · d) faux, $\frac{51}{68} = \frac{3}{4}$.