

Plaque 3 – Fractions irréductibles et calculs exacts

Arithmétique – Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Rendre une fraction irréductible. On divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

$$\frac{84}{126} = \frac{84 \div 42}{126 \div 42} = \frac{2}{3}$$

Une fraction est irréductible quand numérateur et dénominateur sont **premiers entre eux**.

Les quatre opérations.

Opération	Règle	Exemple
addition	même dénominateur d'abord	$\frac{1}{12} + \frac{5}{18} = \frac{3}{36} + \frac{10}{36} = \frac{13}{36}$
soustraction	idem	$\frac{5}{6} - \frac{7}{10} = \frac{25}{30} - \frac{21}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$
multiplication	numérateurs entre eux, dénominateurs entre eux	$\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$
division	multiplier par l'inverse	$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

Le bon dénominateur commun. C'est le **PPCM** des dénominateurs. Prendre leur produit fonctionne aussi, mais oblige à simplifier à la fin.

Simplifier avant de multiplier. C'est le réflexe qui évite les grands nombres :

$$\frac{14}{25} \times \frac{35}{42} = \frac{14}{42} \times \frac{35}{25} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{15}$$

Comparer deux fractions. On les met au même dénominateur, puis on compare les numérateurs. Le produit en croix marche aussi : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ équivaut à $ad < bc$ pour b et d positifs.

Écriture décimale. Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ a une écriture décimale **exacte** si et seulement si b ne contient que des facteurs 2 et 5.

Fraction	Dénominateur	Écriture
$\frac{7}{8}$	$8 = 2^3$	0,875 exacte
$\frac{7}{20}$	$20 = 2^2 \times 5$	0,35 exacte
$\frac{5}{12}$	$12 = 2^2 \times 3$	0,41666... illimitée

Deux contrôles à faire. Vérifier que le résultat est bien irréductible, et vérifier son ordre de grandeur avec une valeur décimale approchée.

Correction de l'exercice 1 - Rendre irréductible

- **Première fraction** : on cherche PGCD(84 ; 126) ✓
- **Décomposition de 84** : $2^2 \times 3 \times 7$ ✓
- **Décomposition de 126** : $2 \times 3^2 \times 7$ ✓
- **Facteurs communs au plus petit exposant** : $2 \times 3 \times 7 = 42$ ✓
- **Simplification** :

$$\frac{84}{126} = \frac{84 \div 42}{126 \div 42} = \frac{2}{3}$$

- **Contrôle d'irréductibilité** : 2 et 3 sont premiers entre eux ✓
- **Contrôle décimal** : $\frac{84}{126} \approx 0,667$ et $\frac{2}{3} \approx 0,667$ ✓
- **Seconde fraction** : on décompose ✓
- **Décomposition de 315** : $315 = 5 \times 63 = 3^2 \times 5 \times 7$ ✓
- **Contrôle** : $9 \times 5 \times 7 = 315$ ✓
- **Décomposition de 441** : $441 = 21^2 = 3^2 \times 7^2$ ✓
- **Contrôle** : $9 \times 49 = 441$ ✓
- **Facteurs communs** : 3^2 et 7, soit $9 \times 7 = 63$ ✓
- **Simplification** :

$$\frac{315}{441} = \frac{315 \div 63}{441 \div 63} = \frac{5}{7}$$

- **Contrôle** : 5 et 7 sont premiers ✓
- **Contrôle décimal** : $\frac{315}{441} \approx 0,714$ et $\frac{5}{7} \approx 0,714$ ✓
- **Vérification par Euclide** : $441 = 315 \times 1 + 126$, puis $315 = 126 \times 2 + 63$, puis $126 = 63 \times 2 + 0$ ✓

Réponse. $\frac{84}{126} = \frac{2}{3}$ et $\frac{315}{441} = \frac{5}{7}$.

Correction de l'exercice 2 - Reconnaître une fraction irréductible

- **Première fraction** : on décompose ✓
- **Décomposition de 91** : $91 = 7 \times 13$ ✓
- **Décomposition de 143** : $143 = 11 \times 13$ ✓
- **Facteur commun** : 13 ✓
- **Conclusion** : la fraction **n'est pas** irréductible ✓
- **Simplification** :

$$\frac{91}{143} = \frac{91 \div 13}{143 \div 13} = \frac{7}{11}$$

- **Contrôle** : 7 et 11 sont premiers ✓
- **Contrôle décimal** : $\frac{91}{143} \approx 0,636$ et $\frac{7}{11} \approx 0,636$ ✓
- **Seconde fraction** : on décompose ✓
- **Décomposition de 51** : 3×17 ✓
- **Décomposition de 68** : $2^2 \times 17$ ✓
- **Facteur commun** : 17 ✓
- **Simplification** :

$$\frac{51}{68} = \frac{51 \div 17}{68 \div 17} = \frac{3}{4}$$

- **Contrôle décimal** : $\frac{51}{68} = 0,75$ ✓
 - **Piège de la calculatrice** : $\frac{91}{143}$ affiche 0,6363636..., ce qui ne donne pas le PGCD ✓
 - **Méthode fiable** : la décomposition, ou l'algorithme d'Euclide ✓
 - **Contrôle par Euclide sur 91 et 143** : $143 = 91 + 52$, puis $91 = 52 + 39$, puis $52 = 39 + 13$, puis $39 = 13 \times 3 + 0$ ✓
 - **Conclusion** : le PGCD est bien 13 ✓
- Réponse.** Aucune des deux : $\frac{91}{143} = \frac{7}{11}$ et $\frac{51}{68} = \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 3 - Additionner au plus petit dénominateur

- **Dénominateurs** : 15 et 25 ✓
- **Décompositions** : $15 = 3 \times 5$ et $25 = 5^2$ ✓
- **PPCM** : $3 \times 5^2 = 75$ ✓
- **Première fraction** : $\frac{7}{15} = \frac{7 \times 5}{75} = \frac{35}{75}$ ✓
- **Seconde fraction** : $\frac{11}{25} = \frac{11 \times 3}{75} = \frac{33}{75}$ ✓
- **Somme** :

$$\frac{35}{75} + \frac{33}{75} = \frac{68}{75}$$
- **Contrôle d'irréductibilité** : $68 = 2^2 \times 17$ ✓
- **Décomposition de 75** : 3×5^2 ✓
- **Facteurs communs** : aucun ✓
- **Conclusion** : la fraction est **irréductible** ✓
- **Contrôle décimal** : $\frac{7}{15} \approx 0,467$ et $\frac{11}{25} = 0,44$ ✓
- **Somme approchée** : 0,907 ✓
- **Contrôle** : $\frac{68}{75} \approx 0,907$ ✓
- **Contrôle d'ordre de grandeur** : le résultat est inférieur à 1 ✓
- **Piège du dénominateur produit** : $15 \times 25 = 375$ ✓
- **Calcul alors** : $\frac{175 + 165}{375} = \frac{340}{375}$ ✓
- **Simplification** : en divisant par 5, on retrouve $\frac{68}{75}$ ✓

Réponse. $\frac{68}{75}$, fraction irréductible.

Correction de l'exercice 4 - Soustraire deux fractions

- **Décompositions** : $6 = 2 \times 3$ et $10 = 2 \times 5$ ✓
- **PPCM** : $2 \times 3 \times 5 = 30$ ✓
- **Première fraction** : $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$ ✓
- **Seconde fraction** : $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$ ✓
- **Différence** :

$$\frac{25}{30} - \frac{21}{30} = \frac{4}{30}$$
- **Simplification** : $\text{PGCD}(4; 30) = 2$ ✓

— **Résultat :**

$$\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

— **Contrôle d'irréductibilité :** 2 est premier et ne divise pas 15 ✓

— **Contrôle décimal :** $\frac{5}{6} \approx 0,833$ et $\frac{7}{10} = 0,7$ ✓

— **Différence approchée :** 0,133 ✓

— **Contrôle :** $\frac{2}{15} \approx 0,133$ ✓

— **Contrôle de signe :** $\frac{5}{6} > \frac{7}{10}$, la différence est positive ✓

— **Vérification de cette comparaison :** $\frac{25}{30} > \frac{21}{30}$ ✓

— **Piège du signe :** inverser les deux termes donnerait $-\frac{2}{15}$ ✓

— **Contrôle par le produit en croix :** $5 \times 10 = 50$ et $6 \times 7 = 42$ ✓

— **Lecture :** $50 > 42$ confirme $\frac{5}{6} > \frac{7}{10}$ ✓

Réponse. $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

Correction de l'exercice 5 - Simplifier avant de multiplier

— **Mauvaise méthode :** multiplier d'abord donne $\frac{490}{1050}$ ✓

— **Inconvénient :** il faut ensuite simplifier de grands nombres ✓

— **Bonne méthode :** croiser les simplifications ✓

— **Première simplification :** $\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$, car $42 = 14 \times 3$ ✓

— **Seconde simplification :** $\frac{35}{25} = \frac{7}{5}$, car $\text{PGCD}(35; 25) = 5$ ✓

— **Produit restant :**

$$\frac{1}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{15}$$

— **Contrôle d'irréductibilité :** 7 est premier et ne divise pas 15 ✓

— **Contrôle par la méthode longue :** $\frac{490}{1050}$ ✓

— **PGCD de 490 et 1050 :** $490 = 2 \times 5 \times 7^2$ et $1050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ ✓

— **Facteurs communs :** $2 \times 5 \times 7 = 70$ ✓

— **Simplification :** $\frac{490 \div 70}{1050 \div 70} = \frac{7}{15}$ ✓

— **Cohérence :** les deux méthodes concordent ✓

— **Contrôle décimal :** $\frac{14}{25} = 0,56$ et $\frac{35}{42} \approx 0,833$ ✓

— **Produit approché :** 0,467 ✓

— **Contrôle :** $\frac{7}{15} \approx 0,467$ ✓

— **Règle à retenir :** on peut simplifier **n'importe quel** numérateur avec **n'importe quel** dénominateur ✓

— **Attention :** cette règle ne vaut **que** pour la multiplication, jamais pour l'addition ✓

Réponse. $\frac{7}{15}$.

Correction de l'exercice 6 - Diviser deux fractions

- **Règle** : diviser revient à multiplier par l'**inverse** ✓
 - **Inverse de** $\frac{15}{28} : \frac{28}{15}$ ✓
 - **Réécriture** : $\frac{9}{14} \times \frac{28}{15}$ ✓
 - **Première simplification** : $\frac{28}{14} = 2$ ✓
 - **Seconde simplification** : $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, car PGCD(9 ; 15) = 3 ✓
 - **Produit restant** :

$$\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$$
 - **Contrôle d'irréductibilité** : 6 = 2 × 3 et 5 est premier ✓
 - **Contrôle décimal** : $\frac{9}{14} \approx 0,643$ et $\frac{15}{28} \approx 0,536$ ✓
 - **Quotient approché** : $\frac{0,643}{0,536} \approx 1,2$ ✓
 - **Contrôle** : $\frac{6}{5} = 1,2$ ✓
 - **Contrôle d'ordre de grandeur** : le résultat dépasse 1 ✓
 - **Explication** : on divise par un nombre **plus petit** que le dividende ✓
 - **Contrôle par la méthode longue** : $\frac{9 \times 28}{14 \times 15} = \frac{252}{210}$ ✓
 - **PGCD de 252 et 210** : $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ et $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ ✓
 - **Facteurs communs** : $2 \times 3 \times 7 = 42$ ✓
 - **Simplification** : $\frac{252 \div 42}{210 \div 42} = \frac{6}{5}$ ✓
 - **Piège classique** : inverser la **première** fraction au lieu de la seconde donnerait $\frac{14 \times 15}{9 \times 28} = \frac{5}{6}$ ✓
- Réponse.** $\frac{6}{5} = 1,2$.

Correction de l'exercice 7 - Comparer deux fractions

- **Première méthode — même dénominateur** ✓
- **Décompositions** : $12 = 2^2 \times 3$ et $16 = 2^4$ ✓
- **PPCM** : $2^4 \times 3 = 48$ ✓
- **Première fraction** : $\frac{7}{12} = \frac{28}{48}$ ✓
- **Seconde fraction** : $\frac{9}{16} = \frac{27}{48}$ ✓
- **Comparaison des numérateurs** : $28 > 27$ ✓
- **Conclusion** :

$$\frac{7}{12} > \frac{9}{16}$$

- **Seconde méthode — produit en croix** ✓
- **Premier produit** : $7 \times 16 = 112$ ✓
- **Second produit** : $12 \times 9 = 108$ ✓
- **Comparaison** : $112 > 108$ ✓
- **Conclusion identique** : $\frac{7}{12} > \frac{9}{16}$ ✓

- **Contrôle décimal** : $\frac{7}{12} \approx 0,5833$ et $\frac{9}{16} = 0,5625$ ✓
- **Cohérence** : les trois méthodes concordent ✓
- **Écart exact** : $\frac{28}{48} - \frac{27}{48} = \frac{1}{48}$ ✓
- **Valeur approchée de l'écart** : $\approx 0,0208$ ✓
- **Contrôle** : $0,5833 - 0,5625 = 0,0208$ ✓
- **Avantage du produit en croix** : aucun PPCM à chercher ✓
- **Avantage du dénominateur commun** : il donne aussi l'écart ✓

Réponse. $\frac{7}{12} > \frac{9}{16}$, avec un écart de $\frac{1}{48}$.

Correction de l'exercice 8 - D'un décimal vers une fraction

- **Premier nombre** : il a trois décimales ✓
- **Écriture initiale** : $0,375 = \frac{375}{1000}$ ✓
- **Décomposition de 375** : 3×5^3 ✓
- **Décomposition de 1000** : $2^3 \times 5^3$ ✓
- **Facteurs communs** : $5^3 = 125$ ✓
- **Simplification** :

$$0,375 = \frac{375 \div 125}{1000 \div 125} = \frac{3}{8}$$

- **Contrôle** : $3 \div 8 = 0,375$ ✓
- **Second nombre** : il a deux décimales ✓
- **Écriture initiale** : $2,16 = \frac{216}{100}$ ✓
- **Décomposition de 216** : $2^3 \times 3^3$ ✓
- **Décomposition de 100** : $2^2 \times 5^2$ ✓
- **Facteurs communs** : $2^2 = 4$ ✓
- **Simplification** :

$$2,16 = \frac{216 \div 4}{100 \div 4} = \frac{54}{25}$$

- **Contrôle** : $54 \div 25 = 2,16$ ✓
- **Contrôle d'irréductibilité** : $54 = 2 \times 3^3$ et $25 = 5^2$, aucun facteur commun ✓
- **Écriture en entier plus fraction** : $\frac{54}{25} = 2 + \frac{4}{25}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{4}{25} = 0,16$ ✓
- **Remarque** : tout nombre décimal est une fraction, dont le dénominateur ne contient que des 2 et des 5 ✓

Réponse. $0,375 = \frac{3}{8}$ et $2,16 = \frac{54}{25}$.

Correction de l'exercice 9 - Écriture décimale exacte ou non

- **Critère** : après simplification, le dénominateur ne doit contenir que des facteurs 2 et 5 ✓
- **Première fraction** : $\frac{7}{8}$ est irréductible, et $8 = 2^3$ ✓
- **Conclusion** : écriture **exacte** ✓
- **Valeur** : $0,875$ ✓

- **Deuxième fraction** : $\frac{5}{12}$ est irréductible, et $12 = 2^2 \times 3$ ✓
- **Présence d'un facteur 3** : écriture **illimitée** ✓
- **Valeur** : 0,41666... ✓
- **Troisième fraction** : $\frac{9}{20}$ est irréductible, et $20 = 2^2 \times 5$ ✓
- **Conclusion** : écriture **exacte** ✓
- **Valeur** : 0,45 ✓
- **Quatrième fraction** : $\frac{4}{21}$ est irréductible, et $21 = 3 \times 7$ ✓
- **Conclusion** : écriture **illimitée** ✓
- **Réponse** :

$\frac{7}{8}$ et $\frac{9}{20}$ ont une écriture décimale exacte

- **Piège de la simplification** : $\frac{15}{24}$ semble illimitée, mais elle vaut $\frac{5}{8}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{5}{8} = 0,625$, exacte ✓
- **Leçon** : il faut **simplifier d'abord** ✓
- **Nombre de décimales** : c'est le plus grand exposant entre celui de 2 et celui de 5 ✓
- **Contrôle pour** $\frac{7}{8}$: 2^3 donne 3 décimales ✓
- **Contrôle pour** $\frac{9}{20}$: $2^2 \times 5$ donne 2 décimales ✓

Réponse. $\frac{7}{8} = 0,875$ et $\frac{9}{20} = 0,45$ sont exactes ; les deux autres sont illimitées (facteurs 3 ou 7).

Correction de l'exercice 10 - Somme remarquable

- **Première somme** : dénominateurs 2, 3 et 6 ✓
- **PPCM** : 6, car 6 est multiple de 2 et de 3 ✓
- **Conversions** : $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ et $\frac{1}{6}$ ✓
- **Somme** :

$$\frac{3+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

- **Contrôle décimal** : $0,5 + 0,333 + 0,167 = 1$ ✓
- **Remarque** : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$ forment une décomposition de 1 ✓
- **Seconde somme** : dénominateurs 2, 4, 8 et 16 ✓
- **PPCM** : 16, le plus grand étant multiple des autres ✓
- **Conversions** : $\frac{8}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{2}{16}$ et $\frac{1}{16}$ ✓
- **Somme** :

$$\frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$$

- **Contrôle d'irréductibilité** : $15 = 3 \times 5$ et $16 = 2^4$ ✓
- **Contrôle décimal** : $\frac{15}{16} = 0,9375$ ✓
- **Contrôle** : $0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 0,9375$ ✓
- **Observation** : la somme approche 1 sans l'atteindre ✓

- **Écart à 1** : $\frac{1}{16}$, le dernier terme ✓
- **Généralisation** : la somme des n premières puissances de $\frac{1}{2}$ vaut $1 - \frac{1}{2^n}$ ✓
- **Contrôle pour $n = 4$** : $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ ✓

Réponse. La première somme vaut 1, la seconde $\frac{15}{16}$.

Correction de l'exercice 11 - Fraction d'une fraction

- **Traduction** : « $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ » se calcule par une **multiplication** ✓
- **Calcul** : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ ✓
- **Simplification** : $\frac{3}{3} = 1$ et $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Résultat** :

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

- **Contrôle par la méthode longue** : $\frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Interprétation** : la moitié du gâteau entier ✓
- **Contrôle sur un exemple concret** : un gâteau de 12 parts ✓
- **Parts mangées** : $\frac{3}{4} \times 12 = 9$ parts ✓
- **Parts au chocolat parmi elles** : $\frac{2}{3} \times 9 = 6$ parts ✓
- **Fraction du gâteau** : $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Cohérence** : les deux approches concordent ✓
- **Part mangée non chocolatée** : $9 - 6 = 3$ parts, soit $\frac{1}{4}$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ✓
- **Part non mangée** : $\frac{1}{4}$ du gâteau, soit 3 parts ✓
- **Contrôle de la somme** : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ✓
- **Piège de l'addition** : $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12} > 1$, ce qui serait absurde ✓
- **Règle** : « une fraction **de** » se traduit toujours par une multiplication ✓

Réponse. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$: la moitié du gâteau.

Correction de l'exercice 12 - Fractions premières avec un nombre

- **Condition** : n et 24 doivent être premiers entre eux ✓
- **Décomposition de 24** : $2^3 \times 3$ ✓
- **Conséquence** : n ne doit être divisible ni par 2 ni par 3 ✓
- **Traduction** : n doit être **impair** et **non multiple de 3** ✓
- **Entiers impairs de 1 à 24** : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 ✓
- **Comptage** : 12 entiers ✓
- **Parmi eux, les multiples de 3** : 3, 9, 15, 21 ✓
- **Comptage** : 4 à retirer ✓
- **Entiers retenus** :

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

— **Nombre :**

8 entiers

— **Contrôle :** $12 - 4 = 8$ ✓

— **Vérification sur un cas :** $\frac{5}{24}$, et 5 est premier, ne divisant pas 24 ✓

— **Vérification d'un cas exclu :** $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, réductible par 3 ✓

— **Autre cas exclu :** $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$, réductible par 8 ✓

— **Remarque :** les huit entiers trouvés sont symétriques deux à deux ✓

— **Contrôle :** $1 + 23 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13 = 24$ ✓

— **Généralisation :** ce compte s'appelle l'**indicatrice d'Euler** de 24 ✓

Réponse. 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23 — soit 8 entiers.

Correction de l'exercice 13 - Équation avec fractions

— **Méthode :** éliminer les dénominateurs ✓

— **PPCM de 6 et 4 :** 12 ✓

— **Multiplication des deux membres par 12 :** $\frac{12x}{6} + \frac{12x}{4} = 60$ ✓

— **Simplification :** $2x + 3x = 60$ ✓

— **Réduction :** $5x = 60$ ✓

— **Solution :**

$$x = 12$$

— **Vérification :** $\frac{12}{6} + \frac{12}{4} = 2 + 3 = 5$ ✓

— **Cohérence :** l'équation est satisfaite ✓

— **Méthode alternative :** additionner d'abord les fractions ✓

— **Somme :** $\frac{x}{6} + \frac{x}{4} = \frac{2x}{12} + \frac{3x}{12} = \frac{5x}{12}$ ✓

— **Équation :** $\frac{5x}{12} = 5$ ✓

— **Résolution :** $5x = 60$, donc $x = 12$ ✓

— **Cohérence :** les deux méthodes concordent ✓

— **Piège :** multiplier par 6 seulement laisserait une fraction ✓

— **Résultat de ce piège :** $x + \frac{6x}{4} = 30$, soit $x + 1,5x = 30$ ✓

— **Ce calcul aboutit quand même :** $2,5x = 30$, donc $x = 12$ ✓

— **Équation voisine :** $\frac{x}{6} + \frac{x}{4} = \frac{5}{6}$ donnerait $5x = 10$, soit $x = 2$ ✓

— **Contrôle :** $\frac{2}{6} + \frac{2}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ ✓

Réponse. $x = 12$.

Correction de l'exercice 14 - Partage en fractions

— **Part des deux premiers :** $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ ✓

— **PPCM de 5 et 4 :** 20 ✓

— **Conversions :** $\frac{8}{20}$ et $\frac{5}{20}$ ✓

- **Somme** : $\frac{13}{20}$ ✓
- **Part du troisième** : le complément à 1 ✓
- **Calcul** :

$$1 - \frac{13}{20} = \frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

- **Contrôle d'irréductibilité** : 7 est premier et ne divise pas 20 ✓
- **Contrôle de la somme** : $\frac{8}{20} + \frac{5}{20} + \frac{7}{20} = \frac{20}{20} = 1$ ✓
- **Montant du premier** : $\frac{2}{5} \times 84\,000$ ✓
- **Calcul** : $\frac{84\,000}{5} = 16\,800$, puis $\times 2 = 33\,600$ € ✓
- **Montant du deuxième** : $\frac{84\,000}{4} = 21\,000$ € ✓
- **Montant du troisième** : $\frac{7}{20} \times 84\,000$ ✓
- **Calcul** : $\frac{84\,000}{20} = 4\,200$, puis $\times 7 = 29\,400$ € ✓
- **Contrôle de la somme** :

$$33\,600 + 21\,000 + 29\,400 = 84\,000 \text{ €}$$

- **Classement des parts** : $\frac{8}{20} > \frac{7}{20} > \frac{5}{20}$ ✓
- **Cohérence** : $33\,600 > 29\,400 > 21\,000$ ✓
- **En pourcentages** : 40 %, 25 % et 35 % ✓
- **Contrôle** : $40 + 25 + 35 = 100$ ✓

Réponse. Le troisième reçoit $\frac{7}{20}$; soit 33 600 €, 21 000 € et 29 400 €.

Correction de l'exercice 15 - Comparer trois fractions

- **Dénominateurs** : 8, 12 et 20 ✓
- **Décompositions** : $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \times 3$ et $20 = 2^2 \times 5$ ✓
- **PPCM** : $2^3 \times 3 \times 5 = 120$ ✓
- **Première fraction** : $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 15}{120} = \frac{75}{120}$ ✓
- **Deuxième** : $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 10}{120} = \frac{70}{120}$ ✓
- **Troisième** : $\frac{13}{20} = \frac{13 \times 6}{120} = \frac{78}{120}$ ✓
- **Comparaison des numérateurs** : $70 < 75 < 78$ ✓
- **Classement** :

$$\frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{13}{20}$$

- **Contrôle décimal** : $\frac{7}{12} \approx 0,5833$ ✓
- **Puis** : $\frac{5}{8} = 0,625$ ✓
- **Puis** : $\frac{13}{20} = 0,65$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Écart entre les extrêmes** : $\frac{78 - 70}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$ ✓
- **Valeur approchée** : $\approx 0,0667$ ✓
- **Contrôle** : $0,65 - 0,5833 = 0,0667$ ✓

- **Toutes proches de** $\frac{3}{5} = 0,6$: les trois fractions sont dans $[0,58 ; 0,65]$ ✓
 - **Piège** : comparer les numérateurs ou les dénominateurs seuls ne donne rien ici ✓
- Réponse.** $\frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{13}{20}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une recette et un partage

a) **Coefficient** : $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ ✓

— **Lait** : $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{15}{8}$ de litre ✓

— **Valeur décimale** : 1,875 litre ✓

— **Farine** : $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}$ ✓

— **Simplification** : $\frac{2}{2} \times \frac{5}{5} = 1$ ✓

— **Résultat** :

1 kilogramme de farine

— **Contrôle** : $\frac{2}{5} = 0,4$ kg, et $0,4 \times 2,5 = 1$ kg ✓

b) **Lait disponible** : $\frac{7}{8}$ de litre ✓

— **Lait pour une personne** : $\frac{3}{4} \div 6 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$ de litre ✓

— **Nombre de personnes** : $\frac{7}{8} \div \frac{1}{8}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{7}{8} \times 8 = 7$ ✓

— **Résultat** :

7 personnes

— **Contrôle** : $7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ ✓

— **Cohérence** : $\frac{7}{8} = 0,875$ litre, et $0,875 \div 0,125 = 7$ ✓

c) **Lait utilisé pour 6 personnes** : $\frac{3}{4}$ de litre ✓

— **Reste** : $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$ ✓

— **Même dénominateur** : $\frac{7}{8} - \frac{6}{8}$ ✓

— **Résultat** :

$\frac{1}{8}$ de litre

— **Valeur décimale** : 0,125 litre, soit 12,5 cL ✓

— **Contrôle** : $0,875 - 0,75 = 0,125$ ✓

— **Interprétation** : il reste de quoi servir **une** personne de plus ✓

— **Cohérence avec la question b)** : $6 + 1 = 7$ personnes ✓

d) **Farine nécessaire** : 1 kilogramme ✓

— **Contenu d'un sac** : $\frac{3}{4}$ de kilogramme ✓

— **Nombre de sacs** : $1 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ ✓

- **Valeur décimale** : $\approx 1,333$ sac ✓
- **Un sac ne suffit pas** : $\frac{3}{4} = 0,75 < 1$ ✓
- **Conclusion** :

2 sacs

- **Farine achetée** : $2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ kilogramme ✓
- **Reste après la recette** : $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ kilogramme ✓
- **Contrôle** : $1,5 - 1 = 0,5$ kg ✓
- **Part du sac restante** : $\frac{1/2}{3/4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ d'un sac ✓
- **Contrôle** : $\frac{2}{3} \times 0,75 = 0,5$ kg ✓
- **Bilan pour 15 personnes** : $\frac{15}{8}$ de litre de lait et 2 sacs de farine ✓

Réponse. a) $\frac{15}{8}$ L de lait et 1 kg de farine · b) 7 personnes · c) $\frac{1}{8}$ de litre · d) 2 sacs.