Plaquette 3 – Fractions irréductibles et calculs exacts

Arithmétique — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Rendre une fraction irréductible. On divise numérateur et dénominateur par leur PGCD.

$$\frac{84}{126} = \frac{84 \div 42}{126 \div 42} = \frac{2}{3}$$

Une fraction est irréductible quand numérateur et dénominateur sont **premiers entre eux**.

Les quatre opérations.

Opération	Règle	Exemple
addition	même dénominateur d'abord	$\frac{1}{12} + \frac{5}{18} = \frac{3}{36} + \frac{10}{36} = \frac{13}{36}$
soustraction	idem	$\frac{5}{6} - \frac{7}{10} = \frac{25}{30} - \frac{21}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$
multiplication	numérateurs entre eux, dénominateurs entre eux	$\frac{2}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$
division	multiplier par l'inverse	$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$

Le bon dénominateur commun. C'est le **plus petit multiple commun** des dénominateurs. Prendre leur produit fonctionne aussi, mais oblige à simplifier à la fin.

Simplifier avant de multiplier. C'est le réflexe qui évite les grands nombres :

$$\frac{14}{25} \times \frac{35}{42} = \frac{14}{42} \times \frac{35}{25} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{15}$$

Comparer deux fractions. On les met au même dénominateur, puis on compare les numérateurs. Le produit en croix marche aussi : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ équivaut à $ad < bc$ pour b et d positifs.

Écriture décimale. Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ a une écriture décimale **exacte** si et seulement si b ne contient que des facteurs 2 et 5.

Fraction	Dénominateur	Écriture
$\frac{7}{8}$	$8 = 2^3$	0,875 exacte
$\frac{7}{20}$	$20 = 2^2 \times 5$	0,35 exacte
$\frac{5}{12}$	$12 = 2^2 \times 3$	0,41666… illimitée

Deux contrôles à faire. Vérifier que le résultat est bien irréductible, et vérifier son ordre de grandeur avec une valeur décimale approchée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 1 – Rendre irréductible

Pour rendre une fraction irréductible en une étape, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Pour $\frac{84}{126}$: $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, donc PGCD $= 2 \times 3 \times 7 = 42$ et

$$\frac{84}{126} = \frac{84 \div 42}{126 \div 42} = \frac{2}{3}$$

Pour $\frac{315}{441}$: $315 = 3^2 \times 5 \times 7$ et $441 = 3^2 \times 7^2$, donc PGCD $= 3^2 \times 7 = 63$ et $\frac{315}{441} = \frac{315 \div 63}{441 \div 63} = \frac{5}{7}$.

Dans les deux cas, le numérateur et le dénominateur obtenus sont premiers entre eux : les fractions sont irréductibles.

Réponse. $\frac{84}{126} = \frac{2}{3}$ et $\frac{315}{441} = \frac{5}{7}$.

Correction de l’exercice 2 – Reconnaître une fraction irréductible

Une fraction est irréductible quand son numérateur et son dénominateur n’ont aucun facteur premier commun. On décompose.

$91 = 7 \times 13$ et $143 = 11 \times 13$: le facteur 13 est commun, la fraction **n’est pas** irréductible.

$$\frac{91}{143} = \frac{91 \div 13}{143 \div 13} = \frac{7}{11}$$

$51 = 3 \times 17$ et $68 = 2^2 \times 17$: le facteur 17 est commun, donc $\frac{51}{68} = \frac{3}{4}$.

Remarque : la calculatrice affiche $\frac{91}{143} \approx 0{,}636$, ce qui ne dit pas s’il faut simplifier ; seule la décomposition le montre.

Réponse. Aucune des deux : $\frac{91}{143} = \frac{7}{11}$ et $\frac{51}{68} = \frac{3}{4}$.

Correction de l’exercice 3 – Additionner au plus petit dénominateur

On met les deux fractions au même dénominateur, le plus petit possible : le plus petit multiple commun de $15 = 3 \times 5$ et $25 = 5^2$, qui vaut $3 \times 5^2 = 75$. On multiplie la première fraction par 5 en haut et en bas, la seconde par 3 :

$$\frac{7}{15} + \frac{11}{25} = \frac{35}{75} + \frac{33}{75} = \frac{68}{75}$$

$68 = 2^2 \times 17$ et $75 = 3 \times 5^2$ n’ont aucun facteur commun : la fraction est irréductible.

Contrôle décimal : $\frac{7}{15} \approx 0{,}467$, $\frac{11}{25} = 0{,}44$, et leur somme 0,907 correspond bien à $\frac{68}{75}$.

Réponse. $\frac{68}{75}$, fraction irréductible.

Correction de l’exercice 4 – Soustraire deux fractions

Le plus petit dénominateur commun est le plus petit multiple commun de $6 = 2 \times 3$ et $10 = 2 \times 5$, soit $2 \times 3 \times 5 = 30$. On multiplie la première fraction par 5 en haut et en bas, la seconde par 3 :

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{10} = \frac{25}{30} - \frac{21}{30} = \frac{4}{30}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On simplifie par PGCD(4 ; 30) = 2 : le résultat vaut $\frac{2}{15}$, fraction irréductible.

Contrôle : la différence est positive, car $\frac{25}{30} > \frac{21}{30}$; en décimal, $0{,}833 - 0{,}7 \approx 0{,}133$, et $\frac{2}{15} \approx 0{,}133$.

Réponse. $\frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

Correction de l'exercice 5 – Simplifier avant de multiplier

Dans un produit de fractions, on peut simplifier un numérateur avec n'importe quel dénominateur avant de multiplier, ce qui évite de manipuler de grands nombres.

$42 = 14 \times 3$: on simplifie 14 (en haut) avec 42 (en bas), il reste 1 et 3. PGCD(35 ; 25) = 5 : on simplifie 35 avec 25, il reste 7 et 5.

$$\frac{14}{25} \times \frac{35}{42} = \frac{1}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{15}$$

Contrôle par la méthode longue : $\frac{14 \times 35}{25 \times 42} = \frac{490}{1050}$, et en divisant par 70 on retrouve $\frac{7}{15}$. Attention : cette simplification croisée ne vaut que pour la multiplication.

Réponse. $\frac{7}{15}$.

Correction de l'exercice 6 – Diviser deux fractions

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse : $\frac{9}{14} \div \frac{15}{28} = \frac{9}{14} \times \frac{28}{15}$.

On simplifie avant de multiplier : $28 = 14 \times 2$, donc $\frac{28}{14}$ laisse 2 ; PGCD(9 ; 15) = 3, donc 9 et 15 deviennent 3 et 5.

$$\frac{9}{14} \times \frac{28}{15} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Contrôle : le résultat dépasse 1, ce qui est normal puisque $\frac{9}{14} \approx 0{,}643$ est plus grand que $\frac{15}{28} \approx 0{,}536$. **Piège** : inverser la première fraction donnerait $\frac{5}{6}$.

Réponse. $\frac{6}{5} = 1{,}2$.

Correction de l'exercice 7 – Comparer deux fractions

Première méthode : un même dénominateur. Le plus petit dénominateur commun est le plus petit multiple commun de $12 = 2^2 \times 3$ et $16 = 2^4$, soit $2^4 \times 3 = 48$. On multiplie la première fraction par 4 en haut et en bas, la seconde par 3 :

$$\frac{7}{12} = \frac{28}{48} \qquad \frac{9}{16} = \frac{27}{48}$$

Comme $28 > 27$, on a $\frac{7}{12} > \frac{9}{16}$, avec un écart de $\frac{1}{48}$.

Seconde méthode : les produits en croix. On compare $7 \times 16 = 112$ et $12 \times 9 = 108$; comme $112 > 108$, la conclusion est la même. Cette méthode évite de chercher le plus petit multiple commun, mais ne donne pas l'écart.

Réponse. $\frac{7}{12} > \frac{9}{16}$, avec un écart de $\frac{1}{48}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – D’un décimal vers une fraction

Un nombre décimal s’écrit comme une fraction de dénominateur 10, 100, 1000… selon son nombre de décimales ; on la rend ensuite irréductible.

0,375 a trois décimales : $0{,}375 = \frac{375}{1000}$. Avec $375 = 3 \times 5^3$ et $1000 = 2^3 \times 5^3$, le PGCD vaut $5^3 = 125$, donc

$$0{,}375 = \frac{375 \div 125}{1000 \div 125} = \frac{3}{8}$$

2,16 a deux décimales : $2{,}16 = \frac{216}{100}$. Avec $216 = 2^3 \times 3^3$ et $100 = 2^2 \times 5^2$, le PGCD vaut 4, d’où $\frac{54}{25}$. **Contrôle** : $3 \div 8 = 0{,}375$ et $54 \div 25 = 2{,}16$.

Réponse. $0{,}375 = \frac{3}{8}$ et $2{,}16 = \frac{54}{25}$.

Correction de l’exercice 9 – Écriture décimale exacte ou non

Une fraction irréductible a une écriture décimale exacte quand son dénominateur ne contient que les facteurs premiers 2 et 5 : elle peut alors s’écrire avec un dénominateur 10, 100, 1000…

— $\frac{7}{8}$: $8 = 2^3$, l’écriture est **exacte**, 0,875.

— $\frac{5}{12}$: $12 = 2^2 \times 3$ contient un 3, l’écriture est **illimitée** (0,41666…).

— $\frac{9}{20}$: $20 = 2^2 \times 5$, l’écriture est **exacte**, 0,45.

— $\frac{4}{21}$: $21 = 3 \times 7$, l’écriture est **illimitée**.

$$\frac{7}{8} \text{ et } \frac{9}{20} \text{ ont une écriture décimale exacte}$$

Attention : il faut simplifier d’abord. $\frac{15}{24}$ a un 3 au dénominateur, mais vaut $\frac{5}{8} = 0{,}625$.

Réponse. $\frac{7}{8} = 0{,}875$ et $\frac{9}{20} = 0{,}45$ sont exactes ; les deux autres sont illimitées (facteurs 3 ou 7).

Correction de l’exercice 10 – Somme remarquable

Première somme. 6 est un multiple de 2 et de 3 : c’est le plus petit dénominateur commun.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Seconde somme. 16 est un multiple de 2, 4 et 8 : on écrit tout en seizièmes, $\frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$, fraction irréductible puisque $15 = 3 \times 5$ et $16 = 2^4$.

Contrôle décimal : $0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 0{,}9375 = \frac{15}{16}$. La seconde somme s’approche de 1 sans l’atteindre : il manque exactement le dernier terme, $\frac{1}{16}$.

Réponse. La première somme vaut 1, la seconde $\frac{15}{16}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Fraction d’une fraction

« Les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ du gâteau » se calcule par une **multiplication** : prendre une fraction d’une quantité, c’est multiplier par cette fraction. On simplifie avant de multiplier :

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Le chocolat mangé représente la **moitié** du gâteau entier.

Contrôle avec un gâteau de 12 parts : on en mange $\frac{3}{4} \times 12 = 9$, dont $\frac{2}{3} \times 9 = 6$ au chocolat, soit $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ du gâteau. **Piège** : additionner $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ donnerait plus que le gâteau entier.

Réponse. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$: la moitié du gâteau.

Correction de l’exercice 12 – Fractions premières avec un nombre

La fraction $\frac{n}{24}$ est irréductible quand n et 24 n’ont aucun facteur premier commun. Comme $24 = 2^3 \times 3$, il faut que n ne soit divisible ni par 2 ni par 3 : n doit être impair et ne pas être un multiple de 3.

Les entiers impairs de 1 à 24 sont au nombre de 12 ; parmi eux, 3, 9, 15 et 21 sont des multiples de 3. Il en reste $12 - 4 = 8$:

$$1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23$$

Contrôle : $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ se simplifie par 3, $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ par 8, alors que $\frac{5}{24}$ ne se simplifie pas. Les huit entiers trouvés vont par paires de somme 24 : $1 + 23 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$.

Réponse. 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23 — soit 8 entiers.

Correction de l’exercice 13 – Équation avec fractions

On élimine les dénominateurs en multipliant les deux membres par un multiple commun de 6 et 4 ; le plus petit est 12.

$$12 \times \frac{x}{6} + 12 \times \frac{x}{4} = 12 \times 5 \quad \text{donc} \quad 2x + 3x = 60$$

On réduit : $5x = 60$, d’où $x = 12$.

Vérification : $\frac{12}{6} + \frac{12}{4} = 2 + 3 = 5$, l’égalité est vraie. On peut aussi additionner d’abord les fractions : $\frac{x}{6} + \frac{x}{4} = \frac{2x}{12} + \frac{3x}{12} = \frac{5x}{12}$, puis résoudre $\frac{5x}{12} = 5$, ce qui redonne $x = 12$.

Réponse. $x = 12$.

Correction de l’exercice 14 – Partage en fractions

Les deux premiers enfants reçoivent ensemble $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$. Le plus petit dénominateur commun est 20 : $\frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$. Le troisième reçoit le reste de l’héritage, c’est-à-dire le complément à 1 :

$$1 - \frac{13}{20} = \frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

Avec 84 000 € : le premier reçoit $\frac{2}{5} \times 84\,000 = 33\,600$ €, le deuxième $84\,000 \div 4 = 21\,000$ € et le troisième $\frac{7}{20} \times 84\,000 = 7 \times 4200 = 29\,400$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : 33 600 + 21 000 + 29 400 = 84 000 €. En pourcentages, les parts valent 40 %, 25 % et 35 %.

Réponse. Le troisième reçoit $\frac{7}{20}$; soit 33 600 €, 21 000 € et 29 400 €.

Correction de l'exercice 15 – Comparer trois fractions

On écrit les trois fractions avec le même dénominateur, le plus petit possible : le plus petit multiple commun de $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \times 3$ et $20 = 2^2 \times 5$, qui vaut $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

$$\frac{5}{8} = \frac{75}{120} \qquad \frac{7}{12} = \frac{70}{120} \qquad \frac{13}{20} = \frac{78}{120}$$

Il suffit de comparer les numérateurs : $70 < 75 < 78$, donc $\frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{13}{20}$.

Contrôle décimal : $\frac{7}{12} \approx 0{,}583$, $\frac{5}{8} = 0{,}625$ et $\frac{13}{20} = 0{,}65$. Comparer seulement les numérateurs ou seulement les dénominateurs de départ ne permettait pas de conclure.

Réponse. $\frac{7}{12} < \frac{5}{8} < \frac{13}{20}$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : une recette et un partage

a) On passe de 6 à 15 personnes en multipliant les quantités par $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$. Lait : $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$ L, soit 1,875 L. Farine : $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$ kg.

b) Une personne demande $\frac{3}{4} \div 6 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$ L de lait. Avec $\frac{7}{8}$ L, on sert $\frac{7}{8} \div \frac{1}{8} = 7$ personnes au maximum.

c) Il reste $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8}$ L, de quoi servir une personne de plus : on retrouve les 7 personnes du b).

d) Il faut 1 kg de farine et un sac en contient $\frac{3}{4}$ kg : un sac ne suffit pas, car $1 \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3} > 1$. Il faut donc

$$\text{2 sacs, soit } \frac{3}{2} \text{ kg de farine, dont } \frac{1}{2} \text{ kg restera}$$

Réponse. a) $\frac{15}{8}$ L de lait et 1 kg de farine · b) 7 personnes · c) $\frac{1}{8}$ de litre · d) 2 sacs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).