

Plaquette 2 – Multiples communs, PPCM et problèmes de cycles

Arithmétique — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Multiple et diviseur, deux mots pour la même chose. Si $a = b \times k$ avec k entier, alors a est un **multiple** de b , et b est un **diviseur** de a .

Multiples communs. Les multiples communs à 6 et 8 sont 24, 48, 72, 96, ... Le plus petit d'entre eux s'appelle le **PPCM** (plus petit commun multiple).

$$\text{PPCM}(6; 8) = 24$$

Calculer un PPCM par la décomposition. On prend chaque facteur premier avec son **plus grand** exposant.

Étape	Exemple avec 60 et 72
décomposer	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $72 = 2^3 \times 3^2$
PGCD : facteurs communs, plus petit exposant	$2^2 \times 3 = 12$
PPCM : tous les facteurs, plus grand exposant	$2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

La relation à connaître.

$$\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = a \times b$$

Elle permet de déduire l'un de l'autre : $\text{PPCM} = \frac{a \times b}{\text{PGCD}}$.

Deux cas particuliers.

- Si a et b sont **premiers entre eux**, alors $\text{PPCM}(a; b) = a \times b$.
- Si b divise a , alors $\text{PGCD} = b$ et $\text{PPCM} = a$.

Reconnaître le bon outil dans un problème.

L'énoncé demande...	Outil
de partager en parts égales, le plus grand possible	PGCD
de découper un objet en morceaux identiques les plus grands	PGCD
quand deux événements se reproduisent ensemble	PPCM
le plus petit objet qu'on peut paver	PPCM

Mémo pour ne pas se tromper. Le PGCD est **plus petit** que les deux nombres, le PPCM est **plus grand**. Un résultat qui ne respecte pas cet encadrement est faux.

Correction de l'exercice 1 – Lister des multiples communs

- **Multiples de 9** : 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ✓
- **Multiples de 12** : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ✓
- **Premier multiple commun visible** : 36 ✓
- **Pour trouver les suivants** : on prend les multiples de 36 ✓
- **Trois premiers multiples communs** : 36 ; 72 ; 108 ✓
- **PPCM** :

$$\text{PPCM}(9; 12) = 36$$

- **Contrôle** : $36 = 9 \times 4$ et $36 = 12 \times 3$ ✓
- **Contrôle par la décomposition** : $9 = 3^2$ et $12 = 2^2 \times 3$ ✓
- **PPCM** : $2^2 \times 3^2 = 36$ ✓
- **PGCD** : le seul facteur commun est 3, donc $\text{PGCD} = 3$ ✓
- **Contrôle par la relation** : $3 \times 36 = 108$ ✓
- **Produit des deux nombres** : $9 \times 12 = 108$ ✓
- **Cohérence** : la relation est vérifiée ✓
- **Encadrement** : $3 < 9 < 12 < 36$ ✓
- **Remarque** : tous les multiples communs sont les multiples du PPCM ✓
- **Contrôle** : $144 = 36 \times 4$ est bien multiple de 9 et de 12 ✓

Réponse. Multiples communs 36 ; 72 ; 108 — le PPCM vaut 36.

Correction de l'exercice 2 - PPCM par la décomposition

- **Décomposition de 84** : $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$ ✓
- **Contrôle** : $4 \times 3 \times 7 = 84$ ✓
- **Décomposition de 126** : $126 = 2 \times 63 = 2 \times 7 \times 9 = 2 \times 3^2 \times 7$ ✓
- **Contrôle** : $2 \times 9 \times 7 = 126$ ✓
- **PGCD — facteurs communs au plus petit exposant** : $2^1, 3^1$ et 7^1 ✓
- **Calcul** :

$$\text{PGCD}(84; 126) = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

- **PPCM — tous les facteurs au plus grand exposant** : $2^2, 3^2$ et 7^1 ✓
- **Calcul** :

$$\text{PPCM}(84; 126) = 4 \times 9 \times 7 = 252$$

- **Contrôle par la relation** : $42 \times 252 = 10\,584$ ✓
- **Produit des deux nombres** : $84 \times 126 = 10\,584$ ✓
- **Cohérence** : la relation est vérifiée ✓
- **Contrôle du PGCD** : $\frac{84}{42} = 2$ et $\frac{126}{42} = 3$ ✓
- **Vérification** : 2 et 3 sont premiers entre eux ✓
- **Contrôle du PPCM** : $\frac{252}{84} = 3$ et $\frac{252}{126} = 2$ ✓
- **Encadrement** : $42 \leq 84 < 126 \leq 252$ ✓
- **Contrôle par Euclide** : $126 = 84 \times 1 + 42$, puis $84 = 42 \times 2 + 0$ ✓
- **Conclusion** : le PGCD est bien 42 ✓

Réponse. PGCD = 42 et PPCM = 252.

Correction de l'exercice 3 - Utiliser la relation PGCD × PPCM

- **Relation du cours** : $\text{PGCD} \times \text{PPCM} = a \times b$ ✓
- **Produit cherché** :

$$15 \times 210 = 3150$$

- **Test de 30 et 105** : leur produit vaut $30 \times 105 = 3150$ ✓
- **Première condition** : satisfaite ✓
- **Mais il faut vérifier le PGCD** ✓

- **Décomposition de 30** : $2 \times 3 \times 5$ ✓
- **Décomposition de 105** : $3 \times 5 \times 7$ ✓
- **Facteurs communs** : 3 et 5 ✓
- **PGCD** : 15 ✓
- **PPCM** : $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ ✓
- **Conclusion** : oui, 30 et 105 conviennent ✓
- **Contrôle** : $\frac{30 \times 105}{15} = 210$ ✓
- **Y a-t-il d'autres couples ?** On écrit $a = 15a'$ et $b = 15b'$ ✓
- **Condition** : $a'b' = \frac{3150}{225} = 14$, avec a' et b' premiers entre eux ✓
- **Couples possibles pour 14** : (1 ; 14) et (2 ; 7) ✓
- **Couples de nombres** : {15 ; 210} et {30 ; 105} ✓
- **Contrôle du premier** : PGCD(15 ; 210) = 15 et PPCM = 210 ✓

Réponse. Leur produit vaut 3150, et oui : 30 et 105 conviennent (l'autre couple possible est 15 et 210).

Correction de l'exercice 4 - Deux bus

- **Outil** : on cherche un **multiple commun** aux deux périodes ✓
- **Décomposition de 12** : $2^2 \times 3$ ✓
- **Décomposition de 18** : 2×3^2 ✓
- **PPCM** : $2^2 \times 3^2 = 36$ ✓
- **Prochaine rencontre** :
36 minutes plus tard, soit à 7 h 36
- **Contrôle** : $36 = 12 \times 3$, le premier bus en est à son 3^e passage ✓
- **Contrôle** : $36 = 18 \times 2$, le second à son 2^e ✓
- **Rencontres suivantes** : toutes les 36 minutes ✓
- **Horaires** : 7 h 36 ; 8 h 12 ; 8 h 48 ; 9 h 24 ; 10 h ; 10 h 36 ; 11 h 12 ; 11 h 48 ✓
- **Durée de 7 h à midi** : 300 minutes ✓
- **Nombre de rencontres après 7 h** : $\frac{300}{36} \approx 8,33$ ✓
- **Arrondi à l'entier inférieur** :
8 rencontres
- **Contrôle de la dernière** : $8 \times 36 = 288$ min, soit 11 h 48 ✓
- **Contrôle de la suivante** : $9 \times 36 = 324$ min, soit 12 h 24, hors de la plage ✓
- **Avec la rencontre de 7 h** : cela fait 9 croisements en tout ✓
- **Nombre de passages du premier bus** : $\frac{300}{12} = 25$ ✓
- **Nombre de passages du second** : $\frac{300}{18} \approx 16,7$, donc 16 ✓

Réponse. À 7 h 36, puis toutes les 36 minutes : 8 nouvelles rencontres avant midi.

Correction de l'exercice 5 - Engrenages

- **Principe** : les deux roues défilent le **même nombre de dents** ✓
- **Ce nombre de dents** doit être un multiple commun de 24 et 36 ✓
- **Décomposition de 24** : $2^3 \times 3$ ✓
- **Décomposition de 36** : $2^2 \times 3^2$ ✓

— **PPCM** : $2^3 \times 3^2 = 72$ dents ✓

— **Tours de la première roue** :

$$\frac{72}{24} = 3 \text{ tours}$$

— **Tours de la seconde roue** :

$$\frac{72}{36} = 2 \text{ tours}$$

— **Contrôle** : $3 \times 24 = 72$ et $2 \times 36 = 72$ ✓

— **Cohérence** : la petite roue tourne **plus** que la grande ✓

— **Rapport des tours** : $\frac{3}{2} = 1,5$ ✓

— **Contrôle** : c'est l'inverse du rapport des dentures, $\frac{36}{24} = 1,5$ ✓

— **PGCD** : $2^2 \times 3 = 12$ ✓

— **Contrôle de la relation** : $12 \times 72 = 864 = 24 \times 36$ ✓

— **Cas de roues premières entre elles** : avec 25 et 36 dents, il faudrait 900 dents ✓

— **Tours alors** : 36 et 25 ✓

— **Intérêt mécanique** : des dentures premières entre elles **répartissent** l'usure sur toutes les dents ✓

— **Contrôle** : ici, la dent 1 de la petite roue ne rencontre qu'une dent sur 12 de la grande ✓

Réponse. 3 tours pour la roue de 24 dents et 2 tours pour celle de 36 (72 dents défilées).

Correction de l'exercice 6 - Trois clignotants

— **Outil** : le PPCM des trois nombres ✓

— **Décompositions** : $4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$ et $10 = 2 \times 5$ ✓

— **Facteurs à retenir** : 2^2 , 3 et 5 ✓

— **PPCM** :

$$\text{PPCM}(4; 6; 10) = 4 \times 3 \times 5 = 60 \text{ secondes}$$

— **Prochain allumage commun** : une minute plus tard ✓

— **Contrôle** : $60 = 4 \times 15 = 6 \times 10 = 10 \times 6$ ✓

— **Piège à éviter** : multiplier les trois nombres donnerait 240, un multiple commun mais pas le **plus petit** ✓

— **Contrôle** : $240 = 60 \times 4$ ✓

— **Nombre d'allumages communs en une heure** : $\frac{3600}{60} = 60$ ✓

— **En comptant celui de midi pile** : 61 ✓

— **Allumages de la première balise** : $\frac{3600}{4} = 900$ ✓

— **De la deuxième** : 600 ✓

— **De la troisième** : 360 ✓

— **Allumages communs aux deux premières** : $\text{PPCM}(4; 6) = 12$, donc 300 ✓

— **Allumages communs à la première et la troisième** : $\text{PPCM}(4; 10) = 20$, donc 180 ✓

— **Allumages communs aux deux dernières** : $\text{PPCM}(6; 10) = 30$, donc 120 ✓

— **Cohérence** : $60 < 120 < 180 < 300$, les triples sont les plus rares ✓

Réponse. Après 60 secondes, soit toutes les minutes — donc 60 fois en une heure.

Correction de l'exercice 7 - Additionner des fractions

- **Dénominateurs** : 12 et 18 ✓
 - **Décompositions** : $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$ ✓
 - **PPCM** : $2^2 \times 3^2 = 36$ ✓
 - **Intérêt** : c'est le plus petit dénominateur commun ✓
 - **Première fraction** : $\frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{36} = \frac{15}{36}$ ✓
 - **Seconde fraction** : $\frac{7}{18} = \frac{7 \times 2}{36} = \frac{14}{36}$ ✓
 - **Somme** :

$$\frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{29}{36}$$
 - **Simplification possible** ? 29 est premier ✓
 - **Divise-t-il 36** ? Non ✓
 - **Conclusion** : la fraction est **irréductible** ✓
 - **Valeur décimale** : $\frac{29}{36} \approx 0,806$ ✓
 - **Contrôle** : $\frac{5}{12} \approx 0,417$ et $\frac{7}{18} \approx 0,389$ ✓
 - **Somme approchée** : 0,806 ✓
 - **Cohérence** : les deux calculs concordent ✓
 - **Piège du dénominateur** : prendre $12 \times 18 = 216$ fonctionnerait aussi ✓
 - **Résultat obtenu alors** : $\frac{90 + 84}{216} = \frac{174}{216}$ ✓
 - **Simplification** : $\frac{174}{216} = \frac{29}{36}$, après division par 6 ✓
 - **Conclusion** : le PPCM évite une simplification finale ✓
- Réponse.** $\frac{29}{36}$, fraction irréductible.

Correction de l'exercice 8 - Deux coureurs sur une piste

- **Outil** : le PPCM des deux durées ✓
- **Décomposition de 80** : $2^4 \times 5$ ✓
- **Décomposition de 100** : $2^2 \times 5^2$ ✓
- **PPCM** : $2^4 \times 5^2 = 400$ ✓
- **Ils se retrouvent après** :

$$400 \text{ secondes, soit } 6 \text{ min } 40 \text{ s}$$
- **Tours du premier** : $\frac{400}{80} = 5$ tours ✓
- **Tours du second** : $\frac{400}{100} = 4$ tours ✓
- **Contrôle** : $5 \times 80 = 400$ et $4 \times 100 = 400$ ✓
- **Cohérence** : le plus rapide fait **un tour de plus** ✓
- **PGCD** : $2^2 \times 5 = 20$ ✓
- **Contrôle de la relation** : $20 \times 400 = 8000 = 80 \times 100$ ✓
- **Quand le premier double-t-il le second** ? On compare leurs vitesses en tours par seconde ✓
- **Écart de vitesse** : $\frac{1}{80} - \frac{1}{100} = \frac{100 - 80}{8000} = \frac{1}{400}$ tour par seconde ✓

- **Donc** : il prend un tour d'avance en 400 secondes ✓
- **Cohérence** : c'est exactement quand ils se retrouvent au départ ✓
- **Deuxième rencontre au départ** : après 800 secondes ✓
- **Tours alors** : 10 et 8 ✓

Réponse. Après 400 s (6 min 40 s) : 5 tours pour le premier, 4 pour le second.

Correction de l'exercice 9 - Nombres premiers entre eux

- **Décomposition de 15** : 3×5 ✓
- **Décomposition de 28** : $2^2 \times 7$ ✓
- **Facteurs communs** : aucun ✓
- **Conclusion** : 15 et 28 sont **premiers entre eux** ✓
- **PGCD** : 1 ✓
- **PPCM** :

$$\text{PPCM}(15; 28) = 15 \times 28 = 420$$

- **Règle** : quand le PGCD vaut 1, le PPCM est le **produit** ✓
- **Contrôle de la relation** : $1 \times 420 = 420$ ✓
- **Décomposition de 21** : 3×7 ✓
- **Décomposition de 35** : 5×7 ✓
- **Facteur commun** : 7 ✓
- **PGCD** : 7 ✓
- **PPCM** :

$$\text{PPCM}(21; 35) = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

- **Contrôle de la relation** : $7 \times 105 = 735 = 21 \times 35$ ✓
- **Comparaison** : 105 est bien **plus petit** que le produit 735 ✓
- **Rapport** : $\frac{735}{105} = 7$, soit le PGCD ✓
- **Commentaire** : plus les nombres ont de facteurs communs, plus le PPCM est **petit** par rapport au produit ✓
- **Cas extrême** : si b divise a , le PPCM vaut a , bien inférieur au produit ✓
- **Contrôle** : $\text{PPCM}(6; 24) = 24$, contre un produit de 144 ✓

Réponse. $\text{PPCM}(15; 28) = 420$ (le produit, car premiers entre eux) et $\text{PPCM}(21; 35) = 105$.

Correction de l'exercice 10 - Carreler un sol

- **Outil** : ici on **découpe**, c'est donc le **PGCD** ✓
- **Conversion en centimètres** : 420 cm et 300 cm ✓
- **Décomposition de 420** : $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ ✓
- **Décomposition de 300** : $2^2 \times 3 \times 5^2$ ✓
- **Facteurs communs au plus petit exposant** : 2^2 , 3 et 5 ✓
- **PGCD** :

$$\text{PGCD}(420; 300) = 4 \times 3 \times 5 = 60 \text{ cm}$$

- **Taille des dalles** : 60 cm de côté ✓
- **Nombre de dalles en longueur** : $\frac{420}{60} = 7$ ✓
- **Nombre en largeur** : $\frac{300}{60} = 5$ ✓

— **Nombre total :**

$$7 \times 5 = 35 \text{ dalles}$$

- **Contrôle par les aires :** le sol fait $420 \times 300 = 126\,000 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire d'une dalle :** 3600 cm^2 ✓
- **Contrôle :** $\frac{126\,000}{3600} = 35$ ✓
- **Contrôle par Euclide :** $420 = 300 \times 1 + 120$, puis $300 = 120 \times 2 + 60$, puis $120 = 60 \times 2 + 0$ ✓
- **Conclusion :** le PGCD est bien 60 ✓
- **Piège du PPCM :** $\text{PPCM}(420; 300) = 2100 \text{ cm}$, ce qui n'a aucun sens ici ✓
- **Avec des dalles de 30 cm :** il en faudrait $14 \times 10 = 140$ ✓

Réponse. Des dalles de 60 cm de côté, et il en faut $7 \times 5 = 35$.

Correction de l'exercice 11 - Le plus petit carré pavé

- **Outil :** ici on **assemble** pour former un plus grand objet, c'est le **PPCM** ✓
- **Côté du carré :** il doit être multiple de 12 **et** de 18 ✓
- **Décompositions :** $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$ ✓
- **PPCM :** $2^2 \times 3^2 = 36$ ✓
- **Côté du carré :**

$$36 \text{ cm}$$
- **Aire du carré :** $36^2 = 1296 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire d'un carreau :** $12 \times 18 = 216 \text{ cm}^2$ ✓
- **Nombre de carreaux :**

$$\frac{1296}{216} = 6 \text{ carreaux}$$
- **Disposition possible :** 3 carreaux dans un sens ($3 \times 12 = 36$) et 2 dans l'autre ($2 \times 18 = 36$) ✓
- **Contrôle :** $3 \times 2 = 6$ ✓
- **Contrôle de la couverture :** $36 \times 36 = 1296 \text{ cm}^2$ ✓
- **Piège du PGCD :** $\text{PGCD}(12; 18) = 6$, un carré de 6 cm ne contiendrait aucun carreau entier ✓
- **Carré suivant possible :** 72 cm de côté ✓
- **Nombre de carreaux alors :** $\frac{5184}{216} = 24$ ✓
- **Contrôle :** $24 = 6 \times 4$, conforme au carré du rapport des côtés ✓
- **Règle générale :** les côtés possibles sont les **multiples** du PPCM ✓

Réponse. Un carré de 36 cm de côté, avec 6 carreaux.

Correction de l'exercice 12 - Nombre de diviseurs

- **Décomposition :** $360 = 36 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5$ ✓
- **Regroupement :**

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
- **Contrôle :** $8 \times 9 \times 5 = 360$ ✓
- **Nombre de diviseurs :** on ajoute 1 à chaque exposant et l'on multiplie ✓
- **Calcul :** $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \times 3 \times 2$ ✓

— **Résultat :**

24 diviseurs

- **Vérification partielle :** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360 ✓
- **Comptage de la liste :** 24 diviseurs ✓
- **Condition pour un carré parfait :** tous les exposants doivent être **pairs** ✓
- **État actuel :** 2^3 (impair), 3^2 (pair), 5^1 (impair) ✓
- **Facteurs à ajouter :** un 2 et un 5 ✓
- **Multiplieur :**

$$2 \times 5 = 10$$

- **Produit obtenu :** $360 \times 10 = 3600$ ✓
- **Contrôle :** $3600 = 60^2$ ✓
- **Vérification de la décomposition :** $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$ ✓
- **Exposants :** 4, 2 et 2, tous pairs ✓
- **Racine carrée :** $2^2 \times 3 \times 5 = 60$ ✓

Réponse. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, avec 24 diviseurs ; il faut multiplier par 10 pour obtenir $3600 = 60^2$.

Correction de l'exercice 13 - Simplifier une racine carrée

- **Décomposition de 180 :** $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ ✓
- **Contrôle :** $4 \times 9 \times 5 = 180$ ✓
- **Principe :** chaque facteur au carré **sort** de la racine ✓
- **Extraction :** $\sqrt{2^2} = 2$ et $\sqrt{3^2} = 3$ ✓
- **Résultat :**

$$\sqrt{180} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

- **Contrôle numérique :** $6 \times 2,2361 \approx 13,416$ ✓
- **Vérification :** $\sqrt{180} \approx 13,416$ ✓
- **Contrôle exact :** $6^2 \times 5 = 36 \times 5 = 180$ ✓
- **Décomposition de 588 :** $588 = 4 \times 147 = 4 \times 3 \times 49$ ✓
- **Écriture :** $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$ ✓
- **Contrôle :** $4 \times 3 \times 49 = 588$ ✓
- **Extraction :** $\sqrt{2^2} = 2$ et $\sqrt{7^2} = 7$ ✓
- **Résultat :**

$$\sqrt{588} = 2 \times 7 \times \sqrt{3} = 14\sqrt{3}$$

- **Contrôle exact :** $14^2 \times 3 = 196 \times 3 = 588$ ✓
- **Contrôle numérique :** $14 \times 1,7321 \approx 24,249$ ✓
- **Vérification :** $\sqrt{588} \approx 24,249$ ✓
- **Méthode générale :** on garde sous la racine les facteurs d'exposant **impair** ✓
- **Contrôle sur un troisième exemple :** $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \times 3^2} = 6\sqrt{2}$ ✓

Réponse. $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ et $\sqrt{588} = 14\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Deux périodes et un écart

- **Décomposition de 45** : $3^2 \times 5$ ✓
 - **Décomposition de 60** : $2^2 \times 3 \times 5$ ✓
 - **PPCM** : $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ minutes ✓
 - **Période commune** :
180 min, soit 3 heures
 - **Contrôle** : $180 = 45 \times 4 = 60 \times 3$ ✓
 - **Passages communs après 8 h** : 11 h ; 14 h ; 17 h ; 20 h ; 23 h ✓
 - **Nombre jusqu'à minuit** : 5 ✓
 - **Durée de 8 h à minuit** : 16 heures, soit 960 minutes ✓
 - **Contrôle** : $\frac{960}{180} \approx 5,33$, donc 5 passages ✓
 - **Avec celui de 8 h** : 6 passages communs ✓
 - **Passages du premier satellite** : $\frac{960}{45} \approx 21,3$, donc 21 ✓
 - **Passages du second** : $\frac{960}{60} = 16$ ✓
 - **PGCD des périodes** : $3 \times 5 = 15$ minutes ✓
 - **Contrôle de la relation** : $15 \times 180 = 2700 = 45 \times 60$ ✓
 - **Depuis minuit, sur 24 heures** : $\frac{1440}{180} = 8$ passages communs ✓
 - **Cohérence** : 8 passages par jour, soit un toutes les 3 heures ✓
 - **Remarque** : les deux satellites ne peuvent se croiser plus souvent, 180 étant le **plus petit** multiple commun ✓
- Réponse.** Toutes les 3 heures : 5 passages communs de 8 h à minuit (6 en comptant celui de 8 h).

Correction de l'exercice 15 - Vrai ou faux

- a) **Faux** ✓
 - **Contre-exemple** : $\text{PPCM}(4; 6) = 12$, alors que $4 \times 6 = 24$ ✓
 - **Condition pour l'égalité** : les nombres doivent être premiers entre eux ✓
 - **Relation générale** : $\text{PPCM} = \frac{ab}{\text{PGCD}}$ ✓
- b) **Vrai** ✓
 - **Justification** : le PGCD divise a , qui divise le PPCM ✓
 - **Contrôle** : $\text{PGCD}(12; 18) = 6$ et $\text{PPCM} = 36 = 6 \times 6$ ✓
 - **Autre contrôle** : $\text{PGCD}(15; 28) = 1$, et tout nombre est multiple de 1 ✓
- c) **Vrai** ✓
 - **Justification** : la relation $\text{PGCD} \times \text{PPCM} = ab$ donne $1 \times \text{PPCM} = ab$ ✓
 - **Contrôle** : $\text{PPCM}(9; 10) = 90 = 9 \times 10$ ✓
 - **Réciproque également vraie** : si $\text{PPCM} = ab$, alors le PGCD vaut 1 ✓
- d) **Vrai** ✓
 - **Justification** : le PPCM est un multiple de chacun des deux nombres ✓
 - **Conséquence** : il est supérieur ou égal à chacun, donc au plus grand ✓
 - **Cas d'égalité** : quand le plus petit **divise** le plus grand ✓
 - **Contrôle** : $\text{PPCM}(6; 24) = 24$ ✓

- **Encadrement complet à retenir** : $\text{PGCD} \leq \min(a; b) \leq \max(a; b) \leq \text{PPCM}$ ✓
- **Contrôle sur 84 et 126** : $42 \leq 84 \leq 126 \leq 252$ ✓

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) vrai.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : organiser une kermesse

a) **Outil** : on partage, donc le **PGCD** ✓

- **Décomposition de 126** : $2 \times 3^2 \times 7$ ✓
- **Décomposition de 84** : $2^2 \times 3 \times 7$ ✓
- **Facteurs communs au plus petit exposant** : 2, 3 et 7 ✓
- **PGCD** :

$$\text{PGCD}(126; 84) = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

- **Nombre de sachets** : 42 ✓
- **Bonbons par sachet** : $\frac{126}{42} = 3$ ✓
- **Chocolats par sachet** : $\frac{84}{42} = 2$ ✓
- **Contrôle** : $42 \times 3 = 126$ et $42 \times 2 = 84$ ✓
- **Cohérence** : 3 et 2 sont premiers entre eux, on ne peut pas faire plus de sachets ✓
- **Contenu total par sachet** : 5 friandises ✓

b) **Outil** : les animations se répètent, donc le **PPCM** ✓

- **Décomposition de 21** : 3×7 ✓
- **Décomposition de 28** : $2^2 \times 7$ ✓
- **Tous les facteurs au plus grand exposant** : 2^2 , 3 et 7 ✓
- **PPCM** :

$$\text{PPCM}(21; 28) = 4 \times 3 \times 7 = 84 \text{ minutes}$$

- **Première coïncidence** : 84 minutes après 14 h ✓
- **Heure** :

$$15 \text{ h } 24$$

- **Contrôle** : $84 = 21 \times 4 = 28 \times 3$ ✓
- **Interprétation** : la première animation en est à son 4^e retour, la seconde à son 3^e ✓

c) **Durée de 14 h à 18 h** : 240 minutes ✓

- **Nombre de coïncidences** : $\frac{240}{84} \approx 2,86$ ✓
- **Arrondi à l'entier inférieur** :

$$2 \text{ coïncidences}$$

- **Horaires** : 15 h 24 et 16 h 48 ✓
- **Contrôle** : $2 \times 84 = 168$ min, soit 16 h 48 ✓
- **Contrôle de la suivante** : $3 \times 84 = 252$ min, soit 18 h 12, hors de la plage ✓
- **Avec le départ de 14 h** : 3 moments de coïncidence ✓

d) **Premier couple, 126 et 84** ✓

- **PGCD** : 42 ✓
- **PPCM** : tous les facteurs au plus grand exposant, soit $2^2 \times 3^2 \times 7$ ✓
- **Calcul** : $4 \times 9 \times 7 = 252$ ✓
- **Produit PGCD × PPCM** : $42 \times 252 = 10\,584$ ✓

- **Produit des nombres** : $126 \times 84 = 10\,584$ ✓
- **Cohérence** : la relation est vérifiée ✓
- **Second couple, 21 et 28** ✓
- **PGCD** : le facteur commun 7 ✓
- **PPCM** : 84 ✓
- **Produit PGCD $\times$ PPCM** : $7 \times 84 = 588$ ✓
- **Produit des nombres** : $21 \times 28 = 588$ ✓
- **Cohérence** : la relation est vérifiée ✓
- **Observation** : $126 = 6 \times 21$ et $84 = 3 \times 28$, les deux couples sont liés ✓
- **Encadrements** : $42 \leq 84 \leq 126 \leq 252$ et $7 \leq 21 \leq 28 \leq 84$ ✓

Réponse. a) 42 sachets de 3 bonbons et 2 chocolats · b) à 15 h 24 (PPCM = 84 min) · c) 2 coïncidences · d) $42 \times 252 = 126 \times 84$ et $7 \times 84 = 21 \times 28$.