Plaquette 2 – Multiples communs et problèmes de cycles

Arithmétique — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Multiple et diviseur, deux mots pour la même chose. Si $a = b \times k$ avec k entier, alors a est un **multiple** de b, et b est un **diviseur** de a.

Multiples communs. Les multiples communs à 6 et 8 sont 24, 48, 72, 96, … : ce sont les nombres qui figurent dans les deux listes de multiples. Le plus petit d'entre eux est ici 24, et tous les autres en sont des multiples.

Trouver le plus petit multiple commun.

— En écrivant les listes de multiples jusqu'au premier nombre commun (pour de petits nombres).

— Par la décomposition en facteurs premiers : on prend chaque facteur premier qui apparaît, avec son **plus grand** exposant.

Étape	Exemple avec 60 et 72
décomposer	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $72 = 2^3 \times 3^2$
plus grand diviseur commun	$2^2 \times 3 = 12$
plus petit multiple commun	$2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

Pour le plus grand diviseur commun, on garde les facteurs **communs** avec leur plus petit exposant ; pour le plus petit multiple commun, **tous** les facteurs avec leur plus grand exposant.

$$360 = 60 \times 6 = 72 \times 5$$

Deux cas particuliers.

— Si a et b n'ont aucun facteur premier commun, leur plus petit multiple commun est le produit $a \times b$.

— Si b divise a, le plus petit multiple commun est a lui-même.

Reconnaître le bon outil dans un problème.

L'énoncé demande…	On cherche
de **partager** en parts égales	le plus grand diviseur commun
de **découper** en morceaux identiques	le plus grand diviseur commun
quand deux cycles **coïncident**	le plus petit multiple commun
le plus petit objet à **paver**	le plus petit multiple commun

Mémo pour ne pas se tromper. Un diviseur commun est **plus petit** que les deux nombres, un multiple commun est **plus grand**. Un résultat qui ne respecte pas cet encadrement est faux.

Correction de l'exercice 1 – Lister des multiples communs

On écrit les premiers multiples de chaque nombre en ajoutant le nombre à chaque fois :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— multiples de 9 : 9 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 ; 54 ;
— multiples de 12 : 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72.

Le premier nombre présent dans les deux listes est 36 : c’est le plus petit multiple commun,

$$36$$

Les multiples communs sont exactement les multiples de 36 : les trois premiers sont 36, 72 et 108. **Contrôle** : $36 = 9 \times 4 = 12 \times 3$, et avec les décompositions $9 = 3^2$ et $12 = 2^2 \times 3$, on retrouve $2^2 \times 3^2 = 36$.

Réponse. Multiples communs 36 ; 72 ; 108 — le plus petit multiple commun vaut 36.

Correction de l’exercice 2 – Plus petit multiple commun par la décomposition

On décompose chaque nombre en divisant par les plus petits nombres premiers :

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7 \qquad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Le PGCD est le produit des facteurs **communs**, chacun avec le plus petit exposant : $\mathrm{PGCD}(84\,;126) = 2 \times 3 \times 7 = 42$.

Le plus petit multiple commun est le produit de **tous** les facteurs, chacun avec le plus grand exposant : $2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$.

Contrôle : $84 = 42 \times 2$ et $126 = 42 \times 3$, avec 2 et 3 premiers entre eux ; $252 = 84 \times 3 = 126 \times 2$.

Réponse. PGCD 42 et plus petit multiple commun 252.

Correction de l’exercice 3 – Des billes en sacs de 12 ou de 15

Le nombre de billes est à la fois un multiple de 12 et un multiple de 15 : c’est un multiple commun. On cherche le plus petit en décomposant : $12 = 2^2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$. On prend chaque facteur avec son plus grand exposant :

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

Les multiples communs à 12 et 15 sont les multiples de 60 : 60, 120, 180, 240, … Entre 100 et 200, il y a 120 et 180.

Contrôle : $120 = 12 \times 10 = 15 \times 8$ et $180 = 12 \times 15 = 15 \times 12$. Les données ne permettent pas de choisir entre les deux : il faudrait une information de plus, par exemple le nombre de billes qui reste quand on les range par 7.

Réponse. 120 ou 180 billes (multiples de 60 entre 100 et 200).

Correction de l’exercice 4 – Deux bus

Les deux lignes se croiseront de nouveau quand un nombre entier de passages de chacune sera écoulé : on cherche le plus petit multiple commun de 12 et 18. Avec $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$:

$$2^2 \times 3^2 = 36 \text{ minutes}$$

La prochaine rencontre a lieu à 7 h 36 (troisième passage de la première ligne, deuxième de la seconde), puis toutes les 36 minutes : 8 h 12, 8 h 48, 9 h 24, 10 h, 10 h 36, 11 h 12, 11 h 48. La suivante tomberait à 12 h 24, après midi.

Il y a donc 8 **nouvelles rencontres** avant midi (9 en comptant celle de 7 h).

Réponse. À 7 h 36, puis toutes les 36 minutes : 8 nouvelles rencontres avant midi.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Engrenages

Les deux roues font défiler le **même nombre de dents** au point de contact. Elles reviennent ensemble à leur position de départ quand ce nombre est un multiple de 24 et de 36 ; le premier d’entre eux est leur plus petit multiple commun. Avec $24 = 2^3 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$:

$$2^3 \times 3^2 = 72 \text{ dents}$$

La petite roue fait alors $72 \div 24 = 3$ tours et la grande $72 \div 36 = 2$ tours. **Contrôle** : la roue qui a le moins de dents tourne plus vite, il est normal qu’elle fasse plus de tours.

Réponse. 3 tours pour la roue de 24 dents et 2 tours pour celle de 36 (72 dents défilées).

Correction de l’exercice 6 – Trois clignotants

Les trois balises se rallument ensemble après une durée multiple de 4, de 6 et de 10 secondes ; la plus petite est leur plus petit multiple commun. On décompose : $4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$ et $10 = 2 \times 5$, et l’on prend chaque facteur avec son plus grand exposant :

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60 \text{ s}$$

Elles se rallument ensemble une minute après midi, puis chaque minute : cela fait $3600 \div 60 = 60$ allumages communs dans l’heure qui suit (61 en comptant celui de midi).

Piège : le produit $4 \times 6 \times 10 = 240$ est un multiple commun, mais pas le plus petit.

Réponse. Après 60 secondes, soit toutes les minutes — donc 60 fois en une heure.

Correction de l’exercice 7 – Additionner des fractions

Pour additionner, on met les fractions au même dénominateur ; le plus petit possible est le plus petit multiple commun des dénominateurs. Avec $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$, il vaut $2^2 \times 3^2 = 36$. On multiplie donc la première fraction par 3 en haut et en bas, la seconde par 2 :

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{29}{36}$$

29 est un nombre premier qui ne divise pas 36 : la fraction est irréductible.

Remarque : prendre le dénominateur $12 \times 18 = 216$ marche aussi, mais donne $\frac{174}{216}$, qu’il faut ensuite simplifier par 6.

Réponse. $\frac{29}{36}$, fraction irréductible.

Correction de l’exercice 8 – Deux coureurs sur une piste

Les coureurs sont ensemble au départ quand chacun a fait un nombre entier de tours : la durée cherchée est un multiple de 80 et de 100 secondes, et l’on cherche le plus petit de ces multiples communs. Avec $80 = 2^4 \times 5$ et $100 = 2^2 \times 5^2$:

$$2^4 \times 5^2 = 400 \text{ s}$$

Ils se retrouvent au départ après 400 s, soit 6 min 40 s. Le premier a alors fait $400 \div 80 = 5$ tours et le second $400 \div 100 = 4$ tours : le plus rapide a exactement un tour d’avance. Ils se retrouveront ensuite toutes les 400 secondes.

Réponse. Après 400 s (6 min 40 s) : 5 tours pour le premier, 4 pour le second.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Nombres premiers entre eux

On décompose : $15 = 3 \times 5$ et $28 = 2^2 \times 7$ n’ont aucun facteur premier commun. Ils sont premiers entre eux, et le plus petit multiple commun est alors simplement le produit :

$$15 \times 28 = 420$$

En revanche, $21 = 3 \times 7$ et $35 = 5 \times 7$ ont le facteur commun 7 : on ne le compte qu’une fois, et $3 \times 5 \times 7 = 105$, sept fois moins que le produit $21 \times 35 = 735$: en effet $735 \div 105 = 7$, c’est le PGCD.

Commentaire : plus deux nombres ont de facteurs communs, plus leur plus petit multiple commun est petit par rapport à leur produit.

Réponse. 420 (le produit, car premiers entre eux) et 105.

Correction de l’exercice 10 – Carreler un sol

Les dalles doivent découper exactement les deux côtés : leur côté est un diviseur commun de 420 cm et de 300 cm, le plus grand possible, c’est-à-dire le PGCD. On décompose : $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$.

$$\mathrm{PGCD}(420\,;300) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \text{ cm}$$

Il faut des dalles de 60 cm de côté : $420 \div 60 = 7$ dalles dans la longueur et $300 \div 60 = 5$ dans la largeur, soit $7 \times 5 = 35$ dalles.

Contrôle par les aires : $\dfrac{420 \times 300}{60 \times 60} = \dfrac{126\,000}{3600} = 35$.

Réponse. Des dalles de 60 cm de côté, et il en faut $7 \times 5 = 35$.

Correction de l’exercice 11 – Le plus petit carré pavé

On assemble les carreaux pour former un carré plus grand : son côté doit être un multiple de 12 **et** de 18, le plus petit possible, c’est-à-dire leur plus petit multiple commun. Avec $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$:

$$2^2 \times 3^2 = 36 \text{ cm}$$

Le plus petit carré mesure 36 cm de côté. On y place $36 \div 12 = 3$ carreaux dans un sens et $36 \div 18 = 2$ dans l’autre, soit $3 \times 2 = 6$ carreaux.

Contrôle par les aires : $36 \times 36 = 1296$ cm² et $6 \times (12 \times 18) = 6 \times 216 = 1296$ cm².

Réponse. Un carré de 36 cm de côté, avec 6 carreaux.

Correction de l’exercice 12 – Nombre de diviseurs

On décompose $360 = 36 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5$, d’où

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Un diviseur de 360 s’écrit avec au plus trois facteurs 2 (4 choix : aucun, un, deux ou trois), au plus deux facteurs 3 (3 choix) et au plus un facteur 5 (2 choix) : il y a $4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs.

Un carré parfait a tous ses exposants pairs. Ici, 2^3 et 5^1 ont des exposants impairs : il faut multiplier par $2 \times 5 = 10$. On obtient $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 60^2$.

Réponse. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, avec 24 diviseurs ; il faut multiplier par 10 pour obtenir $3600 = 60^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Simplifier une racine carrée

On fait apparaître des carrés dans la décomposition, car $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ pour des nombres positifs.

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, donc $\sqrt{180} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$. Contrôle : $6^2 \times 5 = 36 \times 5 = 180$.

$588 = 4 \times 147 = 2^2 \times 3 \times 7^2$, donc

$$\sqrt{588} = 2 \times 7 \times \sqrt{3} = 14\sqrt{3}$$

Contrôle : $14^2 \times 3 = 196 \times 3 = 588$. Sous la racine, il ne reste que les facteurs d’exposant impair : 5 et 3 ne peuvent plus être simplifiés.

Réponse. $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ et $\sqrt{588} = 14\sqrt{3}$.

Correction de l’exercice 14 – Deux périodes et un écart

Les deux satellites passent ensemble après une durée multiple de 45 et de 60 minutes ; la plus petite est leur plus petit multiple commun. Avec $45 = 3^2 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$:

$$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180 \text{ min} = 3 \text{ h}$$

Après 8 h, ils passent ensemble à 11 h, 14 h, 17 h, 20 h et 23 h ; le suivant serait à 2 h du matin, le lendemain. Cela fait 5 **passages communs** jusqu’à minuit, 6 en comptant celui de 8 h.

Contrôle : $180 = 45 \times 4 = 60 \times 3$.

Réponse. Toutes les 3 heures : 5 passages communs de 8 h à minuit (6 en comptant celui de 8 h).

Correction de l’exercice 15 – Vrai ou faux

a) **Faux.** Pour 4 et 6, les multiples de 6 sont 6, 12, … et 12 est déjà un multiple de 4 : le plus petit multiple commun vaut 12, alors que $4 \times 6 = 24$.

b) **Vrai.** $a \times b$ est un multiple de a (c’est a fois b) et un multiple de b. C’est donc un multiple commun, mais pas forcément le plus petit, comme le montre a).

c) **Vrai.** Le plus petit multiple commun s’obtient en prenant chaque facteur premier avec son plus grand exposant ; si aucun facteur n’est commun, on les prend tous, et on retrouve le produit. Exemple : $9 = 3^2$ et $10 = 2 \times 5$ donnent

$$2 \times 3^2 \times 5 = 90 = 9 \times 10$$

d) **Vrai.** Un multiple commun est un multiple de chacun des deux nombres, donc il est au moins égal au plus grand ; il lui est égal quand le plus petit divise le plus grand, comme pour 6 et 24, dont le plus petit multiple commun est 24.

Réponse. a) faux · b) vrai · c) vrai · d) vrai.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : organiser une kermesse

a) On partage tous les bonbons et chocolats en sachets identiques : le nombre de sachets divise 126 et 84, le plus grand possible est leur PGCD. Avec $126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, il vaut $2 \times 3 \times 7 = 42$. On fait 42 sachets de $126 \div 42 = 3$ bonbons et $84 \div 42 = 2$ chocolats.

b) Les animations reviennent ensemble après un multiple de 21 et de 28 minutes ; le plus petit est

$$2^2 \times 3 \times 7 = 84 \text{ min}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Elles coïncident pour la première fois à 15 h 24.

c) La suivante a lieu 84 minutes plus tard, à 16 h 48 ; la troisième tomberait à 18 h 12. Il y a donc 2 coïncidences entre 14 h et 18 h.

d) En 84 minutes, la première animation a fait $84 \div 21 = 4$ séances et la seconde $84 \div 28 = 3$ séances : c’est le moment où elles reviennent ensemble à leur point de départ.

Réponse. a) 42 sachets de 3 bonbons et 2 chocolats · b) à 15 h 24 (84 min) · c) 2 coïncidences · d) 4 séances et 3 séances.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).