

Plaquette 4 – Raisonner et démontrer en arithmétique

Arithmétique – Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Écrire un entier avec une lettre. C'est la clé de toute démonstration arithmétique.

Type d'entier	Écriture	Avec n entier
pair	$2n$	0, 2, 4, ...
impair	$2n + 1$	1, 3, 5, ...
multiple de 3	$3n$	0, 3, 6, ...
deux entiers consécutifs	n et $n + 1$	—
trois entiers consécutifs	$n, n + 1, n + 2$	—

Prouver une divisibilité. On met le nombre sous la forme $k \times (\dots)$ où le contenu de la parenthèse est un **entier**. Par exemple :

$$n^2 + n = n(n + 1)$$

Produit de deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair : le produit est **pair**.

Les trois types de raisonnement attendus.

Question	Méthode
« Montrer que c'est toujours vrai »	démonstration littérale avec n
« Est-ce toujours vrai ? »	chercher un contre-exemple
« Combien y en a-t-il ? »	dénombrer, ou décomposer

Un contre-exemple suffit. Pour réfuter « tout nombre impair est premier », le seul 9 suffit. En revanche, cent exemples ne **démontrent** rien.

Carrés parfaits et décomposition. Un entier est un carré parfait si et seulement si tous les exposants de sa décomposition en facteurs premiers sont **pairs**.

$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = (2^2 \times 3 \times 5)^2 = 60^2$$

Nombre de diviseurs. Si $N = p^a \times q^b \times r^c$, alors N a exactement $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ diviseurs.

Critères de divisibilité à réutiliser. Par 2 (chiffre des unités pair), par 3 et par 9 (somme des chiffres), par 4 (deux derniers chiffres), par 5 (0 ou 5), par 11 (différence alternée des chiffres).

Deux erreurs de rédaction à éviter. Écrire « donc c'est pair » sans faire apparaître le facteur 2, et vérifier sur trois exemples en croyant avoir démontré.

Correction de l'exercice 1 – La somme de deux impairs

- **Écriture du premier impair** : $2n + 1$ avec n entier ✓
- **Écriture du second** : $2m + 1$ avec m entier ✓
- **Attention** : il faut **deux** lettres différentes, les nombres pouvant être distincts ✓

— **Somme** : $(2n + 1) + (2m + 1)$ ✓

— **Réduction** : $2n + 2m + 2$ ✓

— **Factorisation** :

$$2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$$

— **Argument clé** : $n + m + 1$ est un **entier** ✓

— **Conclusion** : la somme est le double d'un entier, donc **paire** ✓

— **Contrôle sur un exemple** : $7 + 13 = 20 = 2 \times 10$ ✓

— **Ici** : $n = 3$, $m = 6$, et $n + m + 1 = 10$ ✓

— **Erreur à éviter** : écrire les deux impairs $2n + 1$ et $2n + 1$ ✓

— **Pourquoi** : cela ne démontrerait que pour deux nombres **égaux** ✓

— **Propriété voisine** : la somme d'un pair et d'un impair est **impaire** ✓

— **Démonstration** : $2n + (2m + 1) = 2(n + m) + 1$ ✓

— **Produit de deux impairs** :

$$(2n + 1)(2m + 1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) + 1$$
 ✓

— **Conclusion** : ce produit est **impair** ✓

— **Contrôle** : $3 \times 5 = 15$, impair ✓

Réponse. $(2n + 1) + (2m + 1) = 2(n + m + 1)$: c'est le double d'un entier, donc un nombre pair.

Correction de l'exercice 2 - Produit de deux entiers consécutifs

— **Écriture** : les deux entiers sont n et $n + 1$ ✓

— **Produit** : $n(n + 1)$ ✓

— **Idée** : parmi deux entiers consécutifs, l'un est **nécessairement pair** ✓

— **Premier cas** : n est pair, donc $n = 2k$ ✓

— **Produit** : $2k(n + 1) = 2[k(n + 1)]$ ✓

— **Conclusion du premier cas** : le produit est pair ✓

— **Second cas** : n est impair, donc $n + 1$ est pair ✓

— **Écriture** : $n + 1 = 2k$ ✓

— **Produit** : $n \times 2k = 2(nk)$ ✓

— **Conclusion du second cas** : le produit est pair ✓

— **Conclusion générale** :

$$n(n + 1) \text{ est toujours pair}$$

— **Contrôle** : $7 \times 8 = 56$, pair ✓

— **Autre contrôle** : $10 \times 11 = 110$, pair ✓

— **Application** : $n^2 + n$ est toujours pair ✓

— **Justification** : $n^2 + n = n(n + 1)$ ✓

— **Contrôle** : pour $n = 5$, on obtient 30 ✓

— **Généralisation** : le produit de **trois** entiers consécutifs est divisible par 6 ✓

— **Contrôle** : $4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20$ ✓

Réponse. L'un des deux entiers est pair, donc le produit s'écrit $2k$: il est pair.

Correction de l'exercice 3 - Somme de trois entiers consécutifs

— **Écriture des trois entiers** : n , $n + 1$ et $n + 2$ ✓

— **Somme** : $n + (n + 1) + (n + 2)$ ✓

— **Réduction** : $3n + 3$ ✓

— **Factorisation :**

$$3n + 3 = 3(n + 1)$$

- **Conclusion :** la somme est le triple d'un entier, donc un **multiple de 3** ✓
- **Remarque élégante :** la somme vaut 3 fois le terme **du milieu** ✓
- **Contrôle :** $7 + 8 + 9 = 24 = 3 \times 8$ ✓
- **Autre contrôle :** $19 + 20 + 21 = 60 = 3 \times 20$ ✓
- **Pour quatre entiers consécutifs :** $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)$ ✓
- **Réduction :** $4n + 6$ ✓
- **Factorisation partielle :** $2(2n + 3)$ ✓
- **Divisible par 2 :** oui, toujours ✓
- **Divisible par 4 :** non, car $2n + 3$ est **impair** ✓
- **Contrôle :** $7 + 8 + 9 + 10 = 34 = 2 \times 17$ ✓
- **Vérification :** 34 n'est pas divisible par 4 ✓
- **Réponse à la question :** la propriété **ne se généralise pas** à quatre entiers ✓
- **Règle générale :** la somme de k entiers consécutifs est divisible par k si et seulement si k est **impair** ✓
- **Contrôle avec $k = 5$:** $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60 = 5 \times 12$ ✓

Réponse. $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$; mais pour quatre entiers, $4n + 6 = 2(2n + 3)$ n'est pas multiple de 4.

Correction de l'exercice 4 - Chercher un contre-exemple

a) **Contre-exemple :** 9 ✓

- **Justification :** $9 = 3 \times 3$, il a trois diviseurs ✓
- **Autres contre-exemples :** 15, 21, 25, 27 ✓
- **Remarque :** 2 est le seul nombre premier **pair** ✓

b) **Contre-exemple :** 12 ✓

- **Divisible par 2 :** $12 = 2 \times 6$ ✓
- **Divisible par 4 :** $12 = 4 \times 3$ ✓
- **Divisible par 8 ?** $12 \div 8 = 1,5$, donc **non** ✓
- **Explication :** $12 = 2^2 \times 3$, il ne contient que deux facteurs 2 ✓
- **Autres contre-exemples :** 4, 20, 28 ✓

c) **Contre-exemple :** $4 \times 9 = 36$ ✓

- **Nature de 4 :** 2^2 , non premier ✓
- **Nature de 9 :** 3^2 , non premier ✓
- **Nature de 36 :** 6^2 , carré parfait ✓
- **Autre contre-exemple :** $6 \times 6 = 36$ ✓
- **Cas encore plus simple :** $4 \times 4 = 16 = 4^2$ ✓

d) **Contre-exemple :** $a = 8$ et $b = 9$ ✓

- **Décompositions :** $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$ ✓
- **Facteurs communs :** aucun ✓
- **PGCD :** 1 ✓
- **Mais :** ni 8 ni 9 n'est premier ✓
- **Autre contre-exemple :** 4 et 25 ✓
- **Leçon :** « premiers entre eux » n'a rien à voir avec « premiers » ✓

— **Contrôle** : $\text{PGCD}(4; 25) = 1$, alors que $4 = 2^2$ et $25 = 5^2$ ✓

Réponse. a) $9 \cdot$ b) $12 \cdot$ c) $4 \times 9 = 36 \cdot$ d) 8 et 9.

Correction de l'exercice 5 - Reconnaître un carré parfait

— **Décomposition de 1764** : $1764 = 4 \times 441$ ✓

— **Suite** : $441 = 21^2 = 3^2 \times 7^2$ ✓

— **Écriture complète** : $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$ ✓

— **Exposants** : 2, 2 et 2, tous **pairs** ✓

— **Conclusion** : 1764 **est** un carré parfait ✓

— **Racine carrée** :

$$\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

— **Contrôle** : $42^2 = 1764$ ✓

— **Décomposition de 2700** : $2700 = 27 \times 100$ ✓

— **Écriture complète** : $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$ ✓

— **Contrôle** : $4 \times 27 \times 25 = 2700$ ✓

— **Exposants** : 2 (pair), 3 (**impair**), 2 (pair) ✓

— **Conclusion** : 2700 **n'est pas** un carré parfait ✓

— **Facteur manquant** : un 3 de plus ✓

— **Multiplieur** :

$$3$$

— **Produit obtenu** : $2700 \times 3 = 8100$ ✓

— **Décomposition** : $2^2 \times 3^4 \times 5^2$, tous les exposants pairs ✓

— **Racine carrée** : $2 \times 3^2 \times 5 = 90$ ✓

— **Contrôle** : $90^2 = 8100$ ✓

— **Nombre de diviseurs de 2700** : $(2 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 36$ ✓

Réponse. $1764 = 42^2$ est un carré parfait ; 2700 non, il faut le multiplier par 3 pour obtenir $8100 = 90^2$.

Correction de l'exercice 6 - Divisibilité par 3 d'une expression

— **Factorisation** : $n^3 - n = n(n^2 - 1)$ ✓

— **Identité remarquable** : $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ ✓

— **Écriture obtenue** :

$$n^3 - n = (n - 1) \times n \times (n + 1)$$

— **Observation clé** : c'est le produit de **trois entiers consécutifs** ✓

— **Divisibilité par 2** : parmi trois entiers consécutifs, au moins un est pair ✓

— **Divisibilité par 3** : parmi trois entiers consécutifs, exactement un est multiple de 3 ✓

— **Justification** : les restes modulo 3 sont 0, 1 et 2 dans un ordre ou un autre ✓

— **Conclusion** : le produit est divisible par 2 **et** par 3 ✓

— **Or** : 2 et 3 sont premiers entre eux ✓

— **Donc** : le produit est divisible par $2 \times 3 = 6$ ✓

— **Contrôle pour $n = 4$** : $64 - 4 = 60 = 6 \times 10$ ✓

— **Vérification par la factorisation** : $3 \times 4 \times 5 = 60$ ✓

— **Contrôle pour $n = 7$** : $343 - 7 = 336 = 6 \times 56$ ✓

- **Vérification** : $6 \times 7 \times 8 = 336$ ✓
- **Contrôle pour** $n = 1$: $1 - 1 = 0$, divisible par 6 ✓
- **Contrôle pour** $n = 10$: $1000 - 10 = 990 = 6 \times 165$ ✓
- **Attention à l'argument** : divisible par 2 et par 4 ne donnerait **pas** divisible par 8 ✓
- **Raison** : 2 et 4 ne sont pas premiers entre eux ✓

Réponse. $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$, produit de trois entiers consécutifs : divisible par 2 et par 3, donc par 6.

Correction de l'exercice 7 - Chiffre des unités

- **Méthode** : observer la périodicité des chiffres des unités ✓
- **Puissances de 7** : $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$ ✓
- **Chiffres des unités** : 7, 9, 3, 1 ✓
- **Puissance suivante** : 7^5 finit par 7, le cycle **recommence** ✓
- **Période** : 4 ✓
- **Reste de 2026 modulo 4** : $2026 = 4 \times 506 + 2$ ✓
- **Position dans le cycle** : la deuxième ✓
- **Chiffre des unités** :
9
- **Contrôle** : $7^2 = 49$ finit par 9 ✓
- **Puissances de 3** : 3, 9, 27, 81, puis 243 ✓
- **Chiffres des unités** : 3, 9, 7, 1, puis 3 à nouveau ✓
- **Période** : 4 également ✓
- **Reste de 100 modulo 4** : 0 ✓
- **Attention** : un reste nul correspond à la **quatrième** position du cycle ✓
- **Chiffre des unités** :
1
- **Contrôle** : $3^4 = 81$ finit par 1 ✓
- **Autre contrôle** : $3^8 = 6561$ finit aussi par 1 ✓
- **Conséquence** : 3^{100} n'est pas divisible par 2 ni par 5 ✓
- **Chiffre des unités de** $7^{2026} \times 3^{100}$: celui de $9 \times 1 = 9$ ✓

Réponse. 7^{2026} finit par 9 (car $2026 \equiv 2$ modulo 4) et 3^{100} finit par 1.

Correction de l'exercice 8 - Divisibilité par 9 et somme des chiffres

- **Critère de divisibilité par 9** : la somme des chiffres doit être divisible par 9 ✓
- **Somme des chiffres** : $4 + a + 7 = a + 11$ ✓
- **Valeurs possibles de a** : de 0 à 9 ✓
- **Plage de la somme** : de 11 à 20 ✓
- **Multiples de 9 dans cette plage** : 18 seulement ✓
- **Équation** : $a + 11 = 18$ ✓
- **Solution** :

$$a = 7$$

- **Nombre obtenu** : 477 ✓
- **Contrôle** : $4 + 7 + 7 = 18$, divisible par 9 ✓
- **Vérification** : $477 \div 9 = 53$ ✓

- **Pour la divisibilité par 3** : la somme doit être multiple de 3 ✓
- **Multiples de 3 entre 11 et 20** : 12, 15 et 18 ✓
- **Valeurs de a** : 1, 4 et 7 ✓
- **Nombres obtenus** :

417, 447 et 477

- **Contrôles** : $417 \div 3 = 139$ ✓ ; $447 \div 3 = 149$ ✓ ; $477 \div 3 = 159$ ✓
- **Observation** : les trois valeurs de a diffèrent de 3 ✓
- **Cohérence** : tout multiple de 9 est multiple de 3, mais l'inverse est faux ✓
- **Contrôle** : $417 \div 9 = 46,33$, non entier ✓

Réponse. Pour 9 : $a = 7$ (le nombre 477). Pour 3 : $a \in \{1; 4; 7\}$.

Correction de l'exercice 9 - Deux nombres, leur PGCD imposé

- **Conséquence du PGCD** : 12 divise a et b ✓
- **Écritures** : $a = 12a'$ et $b = 12b'$ ✓
- **Condition supplémentaire** : a' et b' sont premiers entre eux ✓
- **Équation de la somme** : $12a' + 12b' = 60$ ✓
- **Division par 12** : $a' + b' = 5$ ✓
- **Couples possibles avec $a' < b'$** : (1 ; 4) et (2 ; 3) ✓
- **Test de (1 ; 4)** : $\text{PGCD}(1; 4) = 1$ ✓
- **Test de (2 ; 3)** : $\text{PGCD}(2; 3) = 1$ ✓
- **Les deux conviennent** ✓
- **Premier couple** : $a = 12$ et $b = 48$ ✓
- **Second couple** : $a = 24$ et $b = 36$ ✓
- **Réponse** :

(12 ; 48) et (24 ; 36)

- **Contrôle du premier** : $12 + 48 = 60$ et $\text{PGCD}(12; 48) = 12$ ✓
- **Contrôle du second** : $24 + 36 = 60$ et $\text{PGCD}(24; 36) = 12$ ✓
- **Couple écarté** : $(a'; b') = (0; 5)$, car a serait nul ✓
- **Piège** : le couple $(a'; b') = (5; 0)$ ne respecte pas $a' < b'$ ✓
- **PPCM du premier couple** : $\frac{12 \times 48}{12} = 48$ ✓
- **PPCM du second** : $\frac{24 \times 36}{12} = 72$ ✓

Réponse. (12 ; 48) et (24 ; 36).

Correction de l'exercice 10 - Un nombre premier particulier

- **Idée** : regarder le reste de p dans la division par 6 ✓
- **Restes possibles** : 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 ✓
- **Écritures correspondantes** : $6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5$ ✓
- **Cas du reste 0** : $p = 6k$ est divisible par 6, donc par 2 ✓
- **Exclusion** : p serait non premier (il dépasse 3) ✓
- **Cas du reste 2** : $p = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, divisible par 2 ✓
- **Exclusion** : impossible ✓
- **Cas du reste 4** : $p = 6k + 4 = 2(3k + 2)$, divisible par 2 ✓
- **Exclusion** : impossible ✓
- **Cas du reste 3** : $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, divisible par 3 ✓

- **Exclusion** : impossible, p dépassant 3 ✓
- **Cas restants** : les restes 1 et 5 ✓
- **Conclusion** :

$$p = 6k + 1 \quad \text{ou} \quad p = 6k + 5$$

- **Contrôles** : $5 = 6 \times 0 + 5$ ✓ ; $7 = 6 \times 1 + 1$ ✓ ; $11 = 6 \times 1 + 5$ ✓
- **Autres contrôles** : $13 = 6 \times 2 + 1$ ✓ ; $17 = 6 \times 2 + 5$ ✓ ; $19 = 6 \times 3 + 1$ ✓
- **Réciproque fausse** : $25 = 6 \times 4 + 1$ n'est pas premier ✓
- **Autre contre-exemple** : $35 = 6 \times 5 + 5$ n'est pas premier ✓
- **Utilité pratique** : pour chercher des nombres premiers, on ne teste que ces deux formes ✓

Réponse. Les restes 0, 2, 4 donnent un multiple de 2 et le reste 3 un multiple de 3 : il ne reste que $6k + 1$ et $6k + 5$.

Correction de l'exercice 11 - Compter les diviseurs

- **Décomposition de 48** : $2^4 \times 3$ ✓
- **Nombre de diviseurs** : $(4 + 1)(1 + 1) = 10$ ✓
- **Vérification** : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 ✓
- **Décomposition de 100** : $2^2 \times 5^2$ ✓
- **Nombre de diviseurs** : $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ ✓
- **Vérification** : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 ✓
- **Décomposition de 210** : $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ✓
- **Nombre de diviseurs** : $2^4 = 16$ ✓
- **Réponse** :

210 en a le plus, avec 16 diviseurs

- **Observation** : 210 est le plus grand des trois, mais ce n'est pas la raison ✓
- **Vraie raison** : il a **quatre** facteurs premiers distincts ✓
- **Contre-exemple instructif** : $128 = 2^7$ n'a que 8 diviseurs ✓
- **Nombre impair de diviseurs** : oui, pour 100 ✓
- **Condition** : tous les exposants doivent être pairs ✓
- **Traduction** : le nombre doit être un **carré parfait** ✓
- **Explication** : les diviseurs vont par paires d et $\frac{N}{d}$, sauf si $d = \sqrt{N}$ ✓
- **Contrôle pour 100** : la paire centrale est 10 et 10, comptée une fois ✓
- **Autres exemples** : 36 a 9 diviseurs, 16 en a 5 ✓
- **Contrôle pour 16** : $16 = 2^4$: $(4 + 1) = 5$ diviseurs, soit 1, 2, 4, 8, 16 ✓

Réponse. 48 en a 10, 100 en a 9, 210 en a 16 ; un nombre impair de diviseurs caractérise les carrés parfaits.

Correction de l'exercice 12 - Fraction toujours irréductible

- **Objectif** : montrer que $\text{PGCD}(n; n + 1) = 1$ ✓
- **Notation** : soit d un diviseur commun à n et $n + 1$ ✓
- **Conséquence** : d divise la **différence** ✓
- **Calcul de la différence** : $(n + 1) - n = 1$ ✓
- **Donc** : d divise 1 ✓
- **Conclusion** : $d = 1$ ✓

— **Résultat :**

$$\text{PGCD}(n; n + 1) = 1$$

- **Interprétation :** deux entiers consécutifs sont toujours **premiers entre eux** ✓
- **Conséquence pour la fraction :** elle est **irréductible** ✓
- **Contrôle pour** $n = 8$: $\frac{8}{9}$, et $8 = 2^3$, $9 = 3^2$ ✓
- **Contrôle pour** $n = 14$: $\frac{14}{15}$, et $14 = 2 \times 7$, $15 = 3 \times 5$ ✓
- **Contrôle pour** $n = 100$: $\frac{100}{101}$, et 101 est premier ✓
- **Propriété voisine :** $\frac{n}{n+2}$ est irréductible si et seulement si n est **impair** ✓
- **Contrôle :** $\frac{3}{5}$ est irréductible, mais $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ne l'est pas ✓
- **Justification :** un diviseur commun divise 2, donc vaut 1 ou 2 ✓
- **Cas n pair :** 2 divise les deux, la fraction se simplifie ✓
- **Outil utilisé :** « si d divise a et b , alors d divise $a - b$ » ✓
- **Contrôle de cet outil :** 6 divise 18 et 30, donc aussi 12 ✓

Réponse. Un diviseur commun à n et $n + 1$ divise leur différence 1, donc vaut 1 : la fraction est irréductible.

Correction de l'exercice 13 - Un nombre à deux chiffres et son renversé

- **Écriture décimale de $\overline{ab}$:** $10a + b$ ✓
- **Écriture de $\overline{ba}$:** $10b + a$ ✓
- **Différence :** $(10a + b) - (10b + a)$ ✓
- **Développement :** $10a + b - 10b - a$ ✓
- **Réduction :** $9a - 9b$ ✓
- **Factorisation :**

$$9a - 9b = 9(a - b)$$

- **Argument clé :** $a - b$ est un **entier** ✓
- **Conclusion :** la différence est un **multiple de 9** ✓
- **Contrôle avec 72 :** $72 - 27 = 45 = 9 \times 5$ ✓
- **Ici :** $a = 7$, $b = 2$, et $a - b = 5$ ✓
- **Contrôle avec 41 :** $41 - 14 = 27 = 9 \times 3$ ✓
- **Contrôle avec 55 :** $55 - 55 = 0$, multiple de 9 ✓
- **Valeurs possibles de la différence :** 0, 9, 18, ..., 81 ✓
- **Différence maximale :** avec $a = 9$ et $b = 0$, soit $90 - 9 = 81$ ✓
- **Propriété analogue pour la somme :** $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$ ✓
- **Conclusion :** la somme est toujours un multiple de 11 ✓
- **Contrôle :** $72 + 27 = 99 = 11 \times 9$ ✓
- **Extension à trois chiffres :** $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$, multiple de 99 ✓
- **Contrôle :** $721 - 127 = 594 = 99 \times 6$ ✓

Réponse. $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$: la différence est toujours un multiple de 9.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux avec justification

a) **Vrai** ✓

- **Démonstration :** si $N = 6k$, alors $N = 3 \times (2k)$ ✓

- **Conclusion** : N est divisible par 3 ✓
- **Règle générale** : si d divise N et d' divise d , alors d' divise N ✓

b) **Vrai** ✓

- **Argument clé** : 3 et 4 sont **premiers entre eux** ✓
- **Conséquence** : leur produit 12 divise N ✓
- **Contrôle** : 24 est divisible par 3, par 4 et par 12 ✓
- **Autre contrôle** : 36 également ✓

c) **Faux** ✓

- **Contre-exemple** : 6 ✓
- **Vérifications** : 6 est divisible par 3 et par 6 ✓
- **Mais** : 6 n'est pas divisible par 18 ✓
- **Raison de l'échec** : 3 et 6 ne sont **pas** premiers entre eux ✓
- **Bonne conclusion** : N est divisible par $\text{PPCM}(3; 6) = 6$ ✓
- **Autre contre-exemple** : 12 ✓

d) **Vrai** ✓

- **Écriture** : le nombre impair est $2n + 1$ ✓
- **Carré** : $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ ✓
- **Factorisation** : $2(2n^2 + 2n) + 1$ ✓
- **Conclusion** : c'est un double plus 1, donc **impair** ✓
- **Contrôle** : $7^2 = 49$, impair ✓
- **Propriété réciproque** : si n^2 est impair, alors n est impair ✓
- **Contrôle** : $81 = 9^2$, et 9 est impair ✓

Réponse. a) vrai · b) vrai (3 et 4 premiers entre eux) · c) faux (contre-exemple 6) · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 - Nombres premiers jumeaux

- **Liste des nombres premiers sous 60** : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 ✓
- **Recherche des écarts de 2** ✓
- **Premier couple** : (3; 5) ✓
- **Deuxième** : (5; 7) ✓
- **Troisième** : (11; 13) ✓
- **Quatrième** : (17; 19) ✓
- **Cinquième** : (29; 31) ✓
- **Sixième** : (41; 43) ✓
- **Liste complète** :
 $(3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43)$
- **Nombre de couples** : 6 ✓
- **Cas de (2; 4)** : $4 = 2^2$ n'est **pas** premier ✓
- **Conclusion** : ce n'est pas un couple de jumeaux ✓
- **Remarque sur (3; 5) et (5; 7)** : 5 appartient à deux couples ✓
- **Cas unique** : c'est le seul nombre premier dans cette situation ✓
- **Justification** : il faudrait $p - 2$, p et $p + 2$ tous premiers ✓
- **Or** : parmi trois nombres impairs espacés de 2, l'un est multiple de 3 ✓

- **Contrôle** : 3, 5, 7 fonctionne car le multiple de 3 est 3 lui-même ✓
- **Raréfaction** : entre 50 et 100, il n'y a que (59 ; 61) et (71 ; 73) ✓
- **Question ouverte** : on ne sait toujours pas s'il en existe une infinité ✓

Réponse. (3 ; 5), (5 ; 7), (11 ; 13), (17 ; 19), (29 ; 31) et (41 ; 43) ; (2 ; 4) ne compte pas car 4 n'est pas premier.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : démonstrations enchaînées

a) **Factorisation** : $n^2 + 3n = n(n + 3)$ ✓

- **Premier cas** : n pair, donc $n = 2k$ ✓
- **Produit** : $2k(n + 3)$, pair ✓
- **Second cas** : n impair, donc $n + 3$ est **pair** ✓
- **Justification** : impair plus impair donne pair ✓
- **Produit** : pair également ✓
- **Conclusion** :

$n^2 + 3n$ est toujours pair

- **Contrôle pour** $n = 5$: $25 + 15 = 40$, pair ✓
- **Contrôle pour** $n = 6$: $36 + 18 = 54$, pair ✓

b) **Divisibilité par 2** : le facteur $n(n + 1)$ est un produit de deux entiers consécutifs ✓

- **Conclusion partielle** : le produit est pair ✓
- **Divisibilité par 3** : on regarde le reste de n dans la division par 3 ✓
- **Si le reste est 0** : n est multiple de 3, le produit aussi ✓
- **Si le reste est 2** : alors $n + 1$ est multiple de 3 ✓
- **Exemple** : $n = 5$ donne $n + 1 = 6$ ✓
- **Si le reste est 1** : on écrit $n = 3k + 1$ ✓
- **Calcul** : $2n + 1 = 6k + 2 + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ ✓
- **Donc** : $2n + 1$ est multiple de 3 ✓
- **Vérification** : avec $n = 4$, on a $2n + 1 = 9 = 3 \times 3$ ✓
- **Conclusion** : dans les trois cas, un facteur est multiple de 3 ✓
- **Bilan** : le produit est divisible par 2 et par 3, premiers entre eux ✓
- **Donc** :

$n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 6

- **Contrôle pour** $n = 3$: $3 \times 4 \times 7 = 84 = 6 \times 14$ ✓
- **Contrôle pour** $n = 4$: $4 \times 5 \times 9 = 180 = 6 \times 30$ ✓
- **Remarque** : cette expression vaut 6 fois la somme des carrés de 1 à n ✓
- **Contrôle pour** $n = 3$: $1 + 4 + 9 = 14$, et $6 \times 14 = 84$ ✓

c) **Analyse** : $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ ✓

- **Or** : $n(n + 1)$ est **toujours pair** ✓
- **Donc** : $n(n + 1) + 1$ est toujours **impair** ✓
- **Réponse** :

non, $n^2 + n + 1$ est toujours impair

- **Contrôle pour** $n = 4$: $16 + 4 + 1 = 21$, impair ✓
- **Contrôle pour** $n = 7$: $49 + 7 + 1 = 57$, impair ✓
- **Contrôle pour** $n = 0$: 1, impair ✓

d) **Objectif** : montrer que $\text{PGCD}(2n + 1 ; 2n + 3) = 1$ ✓

— **Notation** : soit d un diviseur commun ✓

— **Conséquence** : d divise la différence ✓

— **Calcul** : $(2n + 3) - (2n + 1) = 2$ ✓

— **Donc** : d divise 2, soit $d = 1$ ou $d = 2$ ✓

— **Élimination de $d = 2$** : $2n + 1$ est **impair** ✓

— **Conclusion** : $d = 1$ ✓

— **Résultat** :

$$\frac{2n+1}{2n+3} \text{ est irréductible}$$

— **Contrôle pour $n = 3$** : $\frac{7}{9}$, irréductible ✓

— **Contrôle pour $n = 7$** : $\frac{15}{17}$, irréductible ✓

— **Contrôle pour $n = 12$** : $\frac{25}{27}$, et $25 = 5^2$, $27 = 3^3$ ✓

— **Remarque** : deux impairs consécutifs sont toujours premiers entre eux ✓

— **Contre-exemple si l'on retirait l'impairité** : $\frac{4}{6}$ se simplifie, 4 et 6 différant aussi de 2 ✓

Réponse. a) $n(n + 3)$ a toujours un facteur pair · b) divisible par 2 et par 3 · c) non, il vaut $n(n + 1) + 1$, toujours impair · d) un diviseur commun divise 2 et les deux termes sont impairs.