Plaquette 4 – Raisonner et démontrer en arithmétique

Arithmétique — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Écrire un entier avec une lettre. C'est la clé de toute démonstration arithmétique.

Type d'entier	Écriture	Avec n entier
pair	$2n$	0, 2, 4, …
impair	$2n+1$	1, 3, 5, …
multiple de 3	$3n$	0, 3, 6, …
deux entiers consécutifs	n et $n+1$	—
trois entiers consécutifs	n, $n+1$, $n+2$	—

Prouver une divisibilité. On met le nombre sous la forme $k \times (\ldots)$ où le contenu de la parenthèse est un **entier**. Par exemple :

$$n^2 + n = n(n+1)$$

Produit de deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair : le produit est **pair**.

Les trois types de raisonnement attendus.

Question	Méthode
« Montrer que c'est toujours vrai »	démonstration littérale avec n
« Est-ce toujours vrai ? »	chercher un **contre-exemple**
« Combien y en a-t-il ? »	dénombrer, ou décomposer

Un contre-exemple suffit. Pour réfuter « tout nombre impair est premier », le seul 9 suffit. En revanche, cent exemples ne **démontrent** rien.

Carrés parfaits et décomposition. Un entier est un carré parfait si et seulement si tous les exposants de sa décomposition en facteurs premiers sont **pairs**.

$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = \left(2^2 \times 3 \times 5\right)^2 = 60^2$$

Nombre de diviseurs. Si $N = p^a \times q^b \times r^c$, alors N a exactement $(a+1)(b+1)(c+1)$ diviseurs.

Critères de divisibilité à réutiliser. Par 2 (chiffre des unités pair), par 3 et par 9 (somme des chiffres), par 4 (deux derniers chiffres), par 5 (0 ou 5), par 11 (différence alternée des chiffres).

Deux erreurs de rédaction à éviter. Écrire « donc c'est pair » sans faire apparaître le facteur 2, et vérifier sur trois exemples en croyant avoir démontré.

Correction de l'exercice 1 – La somme de deux impairs

Un nombre impair s'écrit $2n+1$, avec n entier. Les deux nombres pouvant être différents, on les écrit avec deux lettres : $2n+1$ et $2m+1$. Leur somme vaut

$$(2n+1) + (2m+1) = 2n + 2m + 2 = 2(n+m+1)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Comme $n + m + 1$ est un entier, la somme est le double d'un entier : elle est **paire**.

Exemple : $7 + 13 = 20 = 2 \times 10$ (avec $n = 3$, $m = 6$). **Erreur à éviter** : écrire les deux impairs $2n + 1$ et $2n + 1$ ne démontrerait la propriété que pour deux nombres égaux.

Réponse. $(2n + 1) + (2m + 1) = 2(n + m + 1)$: c'est le double d'un entier, donc un nombre pair.

Correction de l'exercice 2 – Produit de deux entiers consécutifs

Les deux entiers consécutifs s'écrivent n et $n + 1$, et leur produit vaut $n(n + 1)$. Parmi deux entiers consécutifs, l'un est forcément pair. On distingue deux cas.

— Si n est pair, $n = 2k$ avec k entier, et $n(n + 1) = 2 \times k(n + 1)$.
— Si n est impair, alors $n + 1$ est pair, $n + 1 = 2k$, et $n(n + 1) = 2 \times nk$.

Dans les deux cas, le produit est le double d'un entier :

$$n(n + 1) \text{ est toujours pair}$$

Exemples : $7 \times 8 = 56$ et $10 \times 11 = 110$. Conséquence : $n^2 + n = n(n + 1)$ est toujours pair.

Réponse. L'un des deux entiers est pair, donc le produit s'écrit $2k$: il est pair.

Correction de l'exercice 3 – Somme de trois entiers consécutifs

Trois entiers consécutifs s'écrivent n, $n + 1$ et $n + 2$. Leur somme vaut

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

C'est le triple de l'entier $n + 1$: la somme est un **multiple de** 3, et elle vaut même trois fois le nombre du milieu ($7 + 8 + 9 = 24 = 3 \times 8$).

Pour quatre entiers consécutifs, la somme vaut $4n + 6 = 2(2n + 3)$. Elle est paire, mais $2n + 3$ est impair, donc elle n'est jamais un multiple de 4 : par exemple $7 + 8 + 9 + 10 = 34$. La propriété ne se généralise pas à quatre entiers.

Réponse. $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$; mais pour quatre entiers, $4n + 6 = 2(2n + 3)$ n'est pas multiple de 4.

Correction de l'exercice 4 – Chercher un contre-exemple

Un seul contre-exemple suffit pour prouver qu'une affirmation générale est fausse.

a) 9 est impair mais n'est pas premier : $9 = 3 \times 3$ a trois diviseurs (1, 3, 9).

b) 12 est divisible par 2 et par 4 ($12 = 4 \times 3$), mais pas par 8, car $12 = 8 \times 1 + 4$. Sa décomposition $2^2 \times 3$ ne contient que deux facteurs 2.

c) 4 et 9 ne sont pas premiers, et pourtant $4 \times 9 = 36 = 6^2$ est un carré parfait.

d) $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$ n'ont aucun facteur commun, donc

$$\text{PGCD}(8\,;9) = 1$$

alors que ni 8 ni 9 n'est premier : « premiers entre eux » ne veut pas dire « premiers ».

Réponse. a) 9 · b) 12 · c) $4 \times 9 = 36$ · d) 8 et 9.

Correction de l'exercice 5 – Reconnaître un carré parfait

Un entier est un carré parfait quand tous les exposants de sa décomposition en facteurs premiers sont pairs.

$1764 = 4 \times 441 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$: tous les exposants sont pairs, c'est un carré parfait, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

$2700 = 27 \times 100 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$: l'exposant de 3 est impair, ce n'est pas un carré parfait. Il manque un facteur 3 : en multipliant par 3, on obtient $8100 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 = 90^2$.

Contrôle : $42^2 = 1764$ et $90^2 = 8100$.

Réponse. $1764 = 42^2$ est un carré parfait ; 2700 non, il faut le multiplier par 3 pour obtenir $8100 = 90^2$.

Correction de l'exercice 6 – Divisibilité par 3 d'une expression

On factorise par n, puis on reconnaît l'identité remarquable $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1) \times n \times (n+1)$$

C'est le produit de trois entiers consécutifs. Parmi eux, l'un au moins est pair, donc le produit est divisible par 2 ; et l'un d'eux est un multiple de 3 (un entier sur trois l'est), donc le produit est divisible par 3. Étant divisible par 2 et par 3, qui sont premiers entre eux, il est divisible par 6.

Contrôles : pour $n = 4$, $64 - 4 = 60 = 6 \times 10$; pour $n = 7$, $343 - 7 = 336 = 6 \times 56$.

Réponse. $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, produit de trois entiers consécutifs : divisible par 2 et par 3, donc par 6.

Correction de l'exercice 7 – Chiffre des unités

Le chiffre des unités d'une puissance ne dépend que du chiffre des unités du nombre précédent. Pour 7 : $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, puis le chiffre des unités de 7^5 est de nouveau 7. Les chiffres des unités se répètent par cycles de 4 : 7, 9, 3, 1.

On divise l'exposant par 4 : $2026 = 4 \times 506 + 2$. Après 506 cycles complets, on est à la deuxième position du cycle :

$$7^{2026} \text{ se termine par } 9$$

Pour 3 : 3, 9, 27, 81, puis 243 ; le cycle est 3, 9, 7, 1. Comme $100 = 4 \times 25$, on termine exactement un cycle : 3^{100} se termine par 1, comme $3^4 = 81$.

Réponse. 7^{2026} finit par 9 (car $2026 \equiv 2$ modulo 4) et 3^{100} finit par 1.

Correction de l'exercice 8 – Divisibilité par 9 et somme des chiffres

Un nombre est divisible par 9 quand la somme de ses chiffres l'est. Ici, la somme vaut $4 + a + 7 = a + 11$, avec a entre 0 et 9, donc entre 11 et 20. Le seul multiple de 9 dans cet intervalle est 18 :

$$a + 11 = 18 \quad \text{donc} \quad a = 7$$

Le nombre est $477 = 9 \times 53$.

Pour la divisibilité par 3, la somme doit être un multiple de 3 : 12, 15 ou 18, d'où $a = 1$, 4 ou 7, et les nombres 417, 447 et 477 (par exemple $417 = 3 \times 139$). Tout multiple de 9 est multiple de 3, mais pas l'inverse : 417 n'est pas divisible par 9.

Réponse. Pour 9 : $a = 7$ (le nombre 477). Pour 3 : $a \in \{1\,;4\,;7\}$.

Correction de l'exercice 9 – Deux nombres, leur PGCD imposé

Le PGCD vaut 12, donc a et b sont des multiples de 12 : $a = 12a'$ et $b = 12b'$, où a' et b' n'ont plus de diviseur commun autre que 1 (sinon le PGCD serait plus grand que 12). La somme donne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$12a' + 12b' = 60 \quad \text{donc} \quad a' + b' = 5$$

Avec $0 < a' < b'$, les possibilités sont $(1\,;4)$ et $(2\,;3)$, et dans les deux cas les nombres sont premiers entre eux. On obtient les couples $(12\,;48)$ et $(24\,;36)$.

Contrôle : $12 + 48 = 60$ et $\text{PGCD}(12\,;48) = 12$; $24 + 36 = 60$ et $\text{PGCD}(24\,;36) = 12$.

Réponse. $(12\,;48)$ et $(24\,;36)$.

Correction de l'exercice 10 – Un nombre premier particulier

On regarde le reste de p dans la division par 6 : il vaut 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, donc p s'écrit $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ ou $6k + 5$.

— $6k$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$ et $6k + 4 = 2(3k + 2)$ sont pairs : un nombre premier supérieur à 3 ne peut pas s'écrire ainsi.

— $6k + 3 = 3(2k + 1)$ est un multiple de 3 : impossible aussi, puisque $p > 3$.

Il ne reste que deux possibilités :

$$p = 6k + 1 \quad \text{ou} \quad p = 6k + 5$$

Exemples : $5 = 6 \times 0 + 5$, $7 = 6 \times 1 + 1$, $11 = 6 \times 1 + 5$, $13 = 6 \times 2 + 1$. La réciproque est fausse : $25 = 6 \times 4 + 1$ n'est pas premier.

Réponse. Les restes 0, 2, 4 donnent un multiple de 2 et le reste 3 un multiple de 3 : il ne reste que $6k + 1$ et $6k + 5$.

Correction de l'exercice 11 – Compter les diviseurs

On dresse la liste des diviseurs par paires de produit égal au nombre.

— $48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$: 10 diviseurs.

— $100 = 1 \times 100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20 = 10 \times 10$: 9 diviseurs, car la paire 10×10 ne donne qu'un seul diviseur.

— $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$: chaque diviseur contient ou non chacun des quatre facteurs, d'où $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ diviseurs.

210 en a le plus, avec 16 diviseurs

Ce n'est pas parce qu'il est le plus grand, mais parce qu'il a quatre facteurs premiers différents. Un nombre a un nombre **impair** de diviseurs exactement quand c'est un carré parfait : ses diviseurs vont par paires, sauf la racine carrée, qui est seule (10 pour 100).

Réponse. 48 en a 10, 100 en a 9, 210 en a 16 ; un nombre impair de diviseurs caractérise les carrés parfaits.

Correction de l'exercice 12 – Fraction toujours irréductible

Il s'agit de montrer que n et $n + 1$ n'ont pas d'autre diviseur commun que 1. Soit d un diviseur commun : il divise n et $n + 1$, donc il divise leur différence,

$$(n + 1) - n = 1$$

Le seul diviseur de 1 est 1 : on a $d = 1$. Deux entiers consécutifs sont donc premiers entre eux, et la fraction $\dfrac{n}{n+1}$ est irréductible pour tout $n \geq 1$.

Exemples : $\dfrac{8}{9}$ (avec $8 = 2^3$ et $9 = 3^2$), $\dfrac{14}{15}$ (avec $14 = 2 \times 7$ et $15 = 3 \times 5$). En revanche, $\dfrac{n}{n+2}$ peut se simplifier par 2 quand n est pair : $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Réponse. Un diviseur commun à n et $n + 1$ divise leur différence 1, donc vaut 1 : la fraction est irréductible.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Un nombre à deux chiffres et son renversé

Le nombre $\overline{ab}$ a a dizaines et b unités : il vaut $10a + b$. Le nombre renversé vaut $10b + a$. Leur différence est

$$(10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$$

Comme $a - b$ est un entier, la différence est toujours un **multiple de** 9.

Exemples : $72 - 27 = 45 = 9 \times 5$ (avec $a - b = 5$) et $41 - 14 = 27 = 9 \times 3$. De la même façon, la somme vaut $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$, toujours un multiple de 11 : $72 + 27 = 99$.

Réponse. $(10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$: la différence est toujours un multiple de 9.

Correction de l'exercice 14 – Vrai ou faux avec justification

a) **Vrai.** Si $N = 6k$, alors $N = 3 \times (2k)$: N est divisible par 3.

b) **Vrai.** N est divisible par 3 et par 4, qui n'ont aucun facteur commun ; sa décomposition contient donc le facteur 3 et au moins deux facteurs 2, si bien qu'il est divisible par $3 \times 4 = 12$. Exemples : 24, 36.

c) **Faux.** Contre-exemple : 6 est divisible par 3 et par 6, mais pas par 18. L'argument du b) ne marche pas ici, car 3 et 6 ont un facteur commun.

d) **Vrai.** Un nombre impair s'écrit $2n + 1$, et

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

C'est un nombre pair plus 1, donc un nombre impair (par exemple $7^2 = 49$).

Réponse. a) vrai · b) vrai (3 et 4 premiers entre eux) · c) faux (contre-exemple 6) · d) vrai.

Correction de l'exercice 15 – Nombres premiers jumeaux

On écrit la liste des nombres premiers inférieurs à 60 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. On y cherche les paires de nombres qui diffèrent de 2 :

$$(3\,;5),\ (5\,;7),\ (11\,;13),\ (17\,;19),\ (29\,;31),\ (41\,;43)$$

Il y a 6 couples. Le couple $(2\,;4)$ ne convient pas, car $4 = 2^2$ n'est pas premier.

Remarque : 5 appartient à deux couples. C'est le seul cas, car parmi trois nombres impairs qui se suivent de 2 en 2, l'un est toujours un multiple de 3 ; pour 3, 5, 7, ce multiple de 3 est 3 lui-même, qui est premier.

Réponse. $(3\,;5)$, $(5\,;7)$, $(11\,;13)$, $(17\,;19)$, $(29\,;31)$ et $(41\,;43)$; $(2\,;4)$ ne compte pas car 4 n'est pas premier.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : démonstrations enchaînées

a) $n^2 + 3n = n(n + 3)$. Si n est pair, le produit est pair. Si n est impair, $n + 3$ est la somme de deux impairs, donc pair, et le produit est encore pair. Dans tous les cas, $n^2 + 3n$ est pair (par exemple $5^2 + 15 = 40$).

b) $n(n + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc il est pair. Pour la divisibilité par 3, on regarde le reste de n dans la division par 3 : s'il vaut 0, n est multiple de 3 ; s'il vaut 2, $n + 1$ l'est ; s'il vaut 1, $n = 3k + 1$ et $2n + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ l'est. Le produit est divisible par 2 et par 3, donc par 6.

c) $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$: c'est un nombre pair plus 1, donc il est **toujours impair**.

d) Un diviseur commun de $2n + 1$ et $2n + 3$ divise leur différence, qui vaut 2 : il vaut 1 ou

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Or $2n+1$ est impair, donc ce diviseur vaut 1 :

$$\frac{2n+1}{2n+3} \text{ est irréductible}$$

Réponse. a) $n(n+3)$ a toujours un facteur pair · b) divisible par 2 et par 3 · c) non, il vaut $n(n+1)+1$, toujours impair · d) un diviseur commun divise 2 et les deux termes sont impairs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).