

Plaquelette 5 - Problèmes de synthèse : partages, emballages et codes

Arithmétique — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La question à se poser avant tout calcul.

L'énoncé dit...	Outil	Pourquoi
« partager sans reste, le plus grand possible »	PGCD	on cherche un diviseur commun
« des paquets identiques les plus nombreux »	PGCD	on divise les deux quantités
« découper en carrés les plus grands »	PGCD	le côté divise les deux dimensions
« se retrouvent en même temps »	PPCM	on cherche un multiple commun
« le plus petit objet qu'on peut paver »	PPCM	la dimension est multiple des deux
« combien de façons de ranger »	décomposition	on compte les diviseurs

Les trois formules à savoir réutiliser.

$$\text{PGCD} \times \text{PPCM} = a \times b \quad \text{PPCM} = \frac{a \times b}{\text{PGCD}}$$

Nombre de diviseurs de $N = p^a q^b r^c$: $(a+1)(b+1)(c+1)$.

Vérifier une réponse de problème. Trois contrôles, à faire systématiquement :

- le **reste est nul** dans les divisions annoncées ;
- l'**encadrement** $\text{PGCD} \leq \min \leq \max \leq \text{PPCM}$;
- l'**ordre de grandeur** est plausible (pas 3 dalles pour un gymnase, pas 4000 sachets avec 50 bonbons).

Rédiger la conclusion. On répond par une phrase complète avec l'**unité** : « il faut 35 dalles de 60 cm de côté », et non « 35 ».

Piège le plus fréquent. Confondre les deux outils. Repère infailible : si le résultat doit être **plus petit** que les données, c'est le PGCD ; s'il doit être **plus grand**, c'est le PPCM.

Correction de l'exercice 1 - Des bouquets identiques

- **Outil** : on partage, donc le **PGCD** ✓
- **Décomposition de 72** : $2^3 \times 3^2$ ✓
- **Décomposition de 120** : $2^3 \times 3 \times 5$ ✓
- **Facteurs communs au plus petit exposant** : 2^3 et 3 ✓
- **PGCD** :

$$\text{PGCD}(72; 120) = 8 \times 3 = 24$$

- **Nombre maximal de bouquets** : 24 ✓
- **Roses par bouquet** : $\frac{72}{24} = 3$ ✓
- **Tulipes par bouquet** : $\frac{120}{24} = 5$ ✓
- **Contrôle** : $24 \times 3 = 72$ et $24 \times 5 = 120$ ✓

- **Contrôle d’optimalité** : 3 et 5 sont premiers entre eux ✓
- **Interprétation** : on ne peut pas faire davantage de bouquets ✓
- **Fleurs par bouquet** : 8 au total ✓
- **Contrôle global** : $24 \times 8 = 192 = 72 + 120$ ✓
- **Contrôle par Euclide** : $120 = 72 \times 1 + 48$, puis $72 = 48 \times 1 + 24$, puis $48 = 24 \times 2 + 0$ ✓
- **Autres nombres de bouquets possibles** : les diviseurs de 24 ✓
- **Exemple** : 12 bouquets de 6 roses et 10 tulipes ✓
- **Conclusion** : le fleuriste peut composer 24 **bouquets** de 3 roses et 5 tulipes ✓

Réponse. 24 bouquets, chacun avec 3 roses et 5 tulipes.

Correction de l’exercice 2 - Découper un rectangle en carrés

- **Outil** : le côté doit diviser les deux dimensions, donc le **PGCD** ✓
- **Décomposition de 105** : $3 \times 5 \times 7$ ✓
- **Décomposition de 63** : $3^2 \times 7$ ✓
- **Facteurs communs au plus petit exposant** : 3 et 7 ✓
- **PGCD** :

$$\text{PGCD}(105; 63) = 21 \text{ cm}$$
- **Côté des carrés** : 21 cm ✓
- **Carrés en longueur** : $\frac{105}{21} = 5$ ✓
- **Carrés en largeur** : $\frac{63}{21} = 3$ ✓
- **Nombre total** :

$$5 \times 3 = 15 \text{ carrés}$$
- **Contrôle par les aires** : la plaque fait $105 \times 63 = 6615 \text{ cm}^2$ ✓
- **Aire d’un carré** : 441 cm^2 ✓
- **Contrôle** : $\frac{6615}{441} = 15$ ✓
- **Contrôle par Euclide** : $105 = 63 + 42$, puis $63 = 42 + 21$, puis $42 = 21 \times 2 + 0$ ✓
- **Piège du PPCM** : $\text{PPCM}(105; 63) = 315 \text{ cm}$, ce qui dépasse la plaque ✓
- **Vérification de ce piège** : un carré de 315 cm ne tient pas dans 105 cm ✓
- **Autres découpes possibles** : avec des carrés de 7 cm, il en faudrait $15 \times 9 = 135$ ✓
- **Contrôle** : $135 \times 49 = 6615 \text{ cm}^2$ ✓
- **Conclusion** : 15 carrés de 21 cm de côté ✓

Réponse. Des carrés de 21 cm de côté, et il y en a $5 \times 3 = 15$.

Correction de l’exercice 3 - Trois trains

- **Outil** : on synchronise, donc le **PPCM** ✓
- **Décomposition de 25** : 5^2 ✓
- **Décomposition de 40** : $2^3 \times 5$ ✓
- **Décomposition de 60** : $2^2 \times 3 \times 5$ ✓
- **Tous les facteurs au plus grand exposant** : 2^3 , 3 et 5^2 ✓
- **PPCM** :

$$8 \times 3 \times 25 = 600 \text{ minutes}$$
- **Conversion** : 10 heures ✓

— **Prochain départ commun :**

16 h

- **Contrôle** : $600 = 25 \times 24 = 40 \times 15 = 60 \times 10$ ✓
- **Interprétation** : le premier train en est à son 24^e départ ✓
- **Piège du produit** : $25 \times 40 \times 60 = 60\,000$ minutes, soit plus de 41 jours ✓
- **Contrôle** : $60\,000 = 600 \times 100$, c'est bien un multiple commun ✓
- **PPCM des deux premiers** : $\text{PPCM}(25; 40) = 200$ minutes ✓
- **Contrôle** : $600 = 200 \times 3$ ✓
- **PPCM des deux derniers** : $\text{PPCM}(40; 60) = 120$ minutes ✓
- **Contrôle** : $600 = 120 \times 5$ ✓
- **Départs communs dans la journée** : 6 h et 16 h ✓
- **Suivant** : 2 h le lendemain ✓
- **Conclusion** : ils repartiront ensemble à 16 h, soit 10 heures plus tard ✓

Réponse. À 16 h, soit 600 minutes (10 h) plus tard.

Correction de l'exercice 4 - Emballer des cubes

- **Vérification préalable** : 8 divise-t-il chaque dimension ? ✓
- **En longueur** : $\frac{48}{8} = 6$ ✓
- **En largeur** : $\frac{56}{8} = 7$ ✓
- **En hauteur** : $\frac{72}{8} = 9$ ✓
- **Les trois divisions sont exactes** : aucune perte ✓
- **Nombre de cubes** :

$$6 \times 7 \times 9 = 378 \text{ cubes}$$
- **Contrôle par les volumes** : la caisse fait $48 \times 56 \times 72 = 193\,536 \text{ cm}^3$ ✓
- **Volume d'un cube** : $8^3 = 512 \text{ cm}^3$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{193\,536}{512} = 378$ ✓
- **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓
- **Place restante** : **aucune**, le rangement est parfait ✓
- **Explication** : 8 divise exactement les trois dimensions ✓
- **Avec des cubes de 12 cm** : $\frac{48}{12} = 4$, $\frac{56}{12} \approx 4,67$ ✓
- **Conséquence** : seulement 4 rangées en largeur, et il resterait 8 cm ✓
- **Nombre alors** : $4 \times 4 \times 6 = 96$ cubes ✓
- **Volume occupé** : $96 \times 1728 = 165\,888 \text{ cm}^3$ ✓
- **Taux de remplissage** : $\frac{165\,888}{193\,536} \approx 85,7\%$ ✓
- **Plus grand cube rangeable sans perte** : $\text{PGCD}(48; 56; 72) = 8 \text{ cm}$ ✓
- **Conclusion** : 378 cubes de 8 cm, sans aucune place perdue ✓

Réponse. $6 \times 7 \times 9 = 378$ cubes, et il ne reste aucune place (8 divise les trois dimensions).

Correction de l'exercice 5 - Le plus petit cube

- **Outil** : l'arête du cube doit être multiple des trois dimensions, donc le **PPCM** ✓
- **Décompositions** : $6 = 2 \times 3$, $9 = 3^2$ et $12 = 2^2 \times 3$ ✓

— **Tous les facteurs au plus grand exposant** : 2^2 et 3^2 ✓

— **PPCM** :

$$4 \times 9 = 36 \text{ cm}$$

— **Arête du cube** : 36 cm ✓

— **Volume du cube** : $36^3 = 46\,656 \text{ cm}^3$ ✓

— **Volume d'une brique** : $6 \times 9 \times 12 = 648 \text{ cm}^3$ ✓

— **Nombre de briques** :

$$\frac{46\,656}{648} = 72 \text{ briques}$$

— **Contrôle par un rangement concret** : $\frac{36}{6} = 6$, $\frac{36}{9} = 4$ et $\frac{36}{12} = 3$ ✓

— **Produit** : $6 \times 4 \times 3 = 72$ ✓

— **Cohérence** : les deux méthodes concordent ✓

— **Piège du PGCD** : $\text{PGCD}(6; 9; 12) = 3$, un cube de 3 cm ne contiendrait aucune brique ✓

— **Contrôle** : $3 < 6$, la plus petite dimension de la brique ✓

— **Cube suivant possible** : 72 cm d'arête ✓

— **Nombre de briques alors** : $72 \times 8 = 576$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{373\,248}{648} = 576$ ✓

— **Cohérence** : doubler l'arête multiplie le volume par 8 ✓

— **Conclusion** : un cube de 36 cm d'arête, avec 72 briques ✓

Réponse. Un cube de 36 cm d'arête, avec 72 briques.

Correction de l'exercice 6 - Deux tapis roulants

— **Outil** : le **PPCM** des deux durées ✓

— **Décomposition de 54** : 2×3^3 ✓

— **Décomposition de 90** : $2 \times 3^2 \times 5$ ✓

— **Tous les facteurs au plus grand exposant** : 2, 3^3 et 5 ✓

— **PPCM** :

$$2 \times 27 \times 5 = 270 \text{ secondes}$$

— **Conversion** : 4 min 30 s ✓

— **Tours du premier tapis** : $\frac{270}{54} = 5$ ✓

— **Tours du second** : $\frac{270}{90} = 3$ ✓

— **Contrôle** : $5 \times 54 = 270$ et $3 \times 90 = 270$ ✓

— **Cohérence** : le tapis le plus rapide fait plus de tours ✓

— **PGCD** : $2 \times 3^2 = 18$ secondes ✓

— **Contrôle de la relation** : $18 \times 270 = 4860 = 54 \times 90$ ✓

— **Rapport des tours** : $\frac{5}{3}$ ✓

— **Contrôle** : c'est l'inverse du rapport des durées, $\frac{90}{54} = \frac{5}{3}$ ✓

— **Alignements en une heure** : $\frac{3600}{270} \approx 13,3$, donc 13 ✓

— **Contrôle** : $13 \times 270 = 3510$ s, soit 58 min 30 s ✓

— **Suivant** : $14 \times 270 = 3780$ s, au-delà de l'heure ✓

— **Conclusion** : les marques se réalignent toutes les 4 min 30 s ✓

Réponse. Après 270 s (4 min 30 s) : 5 tours pour le premier, 3 pour le second.

Correction de l'exercice 7 - Nombre de rangements

— **Outil** : on compte les **diviseurs** de 96 ✓

— **Décomposition** : $96 = 2^5 \times 3$ ✓

— **Contrôle** : $32 \times 3 = 96$ ✓

— **Nombre de diviseurs** : $(5 + 1)(1 + 1) = 12$ ✓

— **Liste des diviseurs** : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 ✓

— **Comptage de la liste** : 12 ✓

— **Nombre de rangements** :

12 possibilités

— **Interprétation** : chaque diviseur donne un nombre de rangées ✓

— **Exemple** : 6 rangées de 16 livres ✓

— **Diviseurs entre 10 et 20** : 12 et 16 ✓

— **Premier rangement** : 8 rangées de 12 livres ✓

— **Second rangement** : 6 rangées de 16 livres ✓

— **Contrôles** : $8 \times 12 = 96$ et $6 \times 16 = 96$ ✓

— **Réponse** : deux rangements conviennent ✓

— **Remarque** : les diviseurs vont par paires de produit 96 ✓

— **Contrôles** : 1×96 , 2×48 , 3×32 , 4×24 , 6×16 , 8×12 ✓

— **Nombre de paires** : 6, soit la moitié de 12 ✓

— **Cohérence** : 96 n'est pas un carré parfait, son nombre de diviseurs est **pair** ✓

— **Rangement le plus « carré »** : 8 rangées de 12, car $\sqrt{96} \approx 9,8$ ✓

Réponse. 12 rangements possibles ; deux donnent des rangées entre 10 et 20 : 8×12 et 6×16 .

Correction de l'exercice 8 - Code à chiffres distincts

— **Choix du premier chiffre** : 5 possibilités ✓

— **Choix du deuxième** : 4 possibilités, le premier étant pris ✓

— **Choix du troisième** : 3 possibilités ✓

— **Nombre de codes** :

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

— **Multiples de 5** : le chiffre des unités doit être 5 ✓

— **Justification** : aucun 0 n'est disponible ✓

— **Chiffre des unités imposé** : 1 possibilité ✓

— **Chiffres restants** : 4 puis 3 possibilités ✓

— **Nombre de multiples de 5** :

$$4 \times 3 \times 1 = 12$$

— **Proportion** : $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ ✓

— **Cohérence** : un chiffre sur cinq peut occuper la position des unités ✓

— **Multiples de 2** : les unités valent 2 ou 4 ✓

— **Nombre** : $2 \times (4 \times 3) = 24$ ✓

- **Proportion** : $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ ✓
 - **Multiples de 10** : il en faudrait un 0, donc **aucun** ✓
 - **Codes dont la somme des chiffres est divisible par 3** : par exemple $1 + 2 + 3 = 6$ ✓
 - **Triplets convenables** : $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 3; 5\}$, $\{2; 3; 4\}$, $\{3; 4; 5\}$ et $\{1; 2; \dots\}$ — on dénombre ✓
 - **Sommes possibles par triplet** : 6, 9, 9, 12 et d'autres ✓
 - **Comptage direct** : 4 triplets donnent une somme multiple de 3, soit $4 \times 6 = 24$ codes ✓
 - **Contrôle** : chaque triplet se réarrange en $3 \times 2 \times 1 = 6$ codes ✓
- Réponse.** $5 \times 4 \times 3 = 60$ codes, dont 12 sont multiples de 5.

Correction de l'exercice 9 - Partager une somme d'argent

- **Analyse** : la somme par enveloppe doit diviser 252 et 378 ✓
- **Pour avoir le moins d'enveloppes** : la somme doit être **la plus grande** possible ✓
- **Outil** : le PGCD ✓
- **Décomposition de 252** : $2^2 \times 3^2 \times 7$ ✓
- **Contrôle** : $4 \times 9 \times 7 = 252$ ✓
- **Décomposition de 378** : $2 \times 3^3 \times 7$ ✓
- **Contrôle** : $2 \times 27 \times 7 = 378$ ✓
- **Facteurs communs au plus petit exposant** : 2, 3^2 et 7 ✓
- **PGCD** :

$$\text{PGCD}(252; 378) = 2 \times 9 \times 7 = 126 \text{ €}$$
- **Enveloppes du premier tas** : $\frac{252}{126} = 2$ ✓
- **Enveloppes du second tas** : $\frac{378}{126} = 3$ ✓
- **Total** : 5 enveloppes ✓
- **Contrôle** : $5 \times 126 = 630 = 252 + 378$ ✓
- **Contrôle d'optimalité** : 2 et 3 sont premiers entre eux ✓
- **Contrôle par Euclide** : $378 = 252 + 126$, puis $252 = 126 \times 2 + 0$ ✓
- **Autres sommes possibles** : les diviseurs de 126 ✓
- **Exemple** : 63 € par enveloppe donnerait $4 + 6 = 10$ enveloppes ✓
- **Contrôle** : $10 \times 63 = 630$ ✓
- **Conclusion** : 126 € par enveloppe, soit 2 enveloppes pour le premier tas et 3 pour le second ✓

Réponse. 126 € par enveloppe : 2 enveloppes pour 252 € et 3 pour 378 €.

Correction de l'exercice 10 - Fractions d'un chantier

- **Travail des deux jours** : $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$ ✓
- **PPCM de 8 et 5** : 40 ✓
- **Conversions** : $\frac{15}{40}$ et $\frac{16}{40}$ ✓
- **Somme** : $\frac{31}{40}$ ✓
- **Fraction restante** :

$$1 - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}$$

- **Contrôle d'irréductibilité** : $9 = 3^2$ et $40 = 2^3 \times 5$ ✓
- **Surface restante** : $\frac{9}{40} \times 40$ ✓
- **Calcul** :

$$9 \text{ m}^2$$
- **Coïncidence pratique** : le dénominateur 40 égale la surface du mur ✓
- **Conséquence** : chaque quarantième vaut exactement 1 m^2 ✓
- **Surface du premier jour** : $\frac{15}{40} \times 40 = 15 \text{ m}^2$ ✓
- **Surface du deuxième jour** : 16 m^2 ✓
- **Contrôle de la somme** : $15 + 16 + 9 = 40 \text{ m}^2$ ✓
- **En pourcentages** : 37,5 %, 40 % et 22,5 % ✓
- **Contrôle** : $37,5 + 40 + 22,5 = 100$ ✓
- **Si le troisième jour l'équipe peint autant que le deuxième** : $16 > 9$ ✓
- **Conclusion** : une demi-journée suffirait pour finir ✓
- **Fraction correspondante** : $\frac{9}{16}$ du travail du deuxième jour ✓

Réponse. Il reste $\frac{9}{40}$ du mur, soit 9 m^2 .

Correction de l'exercice 11 - Distribuer sans reste

- **Condition** : l'effectif doit diviser 84 **et** 126 ✓
- **Outil** : les **diviseurs communs**, donc les diviseurs du PGCD ✓
- **Décomposition de 84** : $2^2 \times 3 \times 7$ ✓
- **Décomposition de 126** : $2 \times 3^2 \times 7$ ✓
- **PGCD** : $2 \times 3 \times 7 = 42$ ✓
- **Diviseurs de 42** : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 ✓
- **Effectifs possibles** :

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 \text{ ou } 42 \text{ élèves}$$
- **Nombre de possibilités** : 8 ✓
- **Contrôle du nombre** : $42 = 2 \times 3 \times 7$ a $(1 + 1)^3 = 8$ diviseurs ✓
- **Effectif le plus réaliste** : 21 élèves ✓
- **Cahiers par élève** : $\frac{84}{21} = 4$ ✓
- **Stylos par élève** : $\frac{126}{21} = 6$ ✓
- **Contrôle** : $21 \times 4 = 84$ et $21 \times 6 = 126$ ✓
- **Autre effectif plausible** : 14 élèves, avec 6 cahiers et 9 stylos ✓
- **Contrôle** : $14 \times 6 = 84$ et $14 \times 9 = 126$ ✓
- **Effectif de 42** : 2 cahiers et 3 stylos par élève, une classe très nombreuse ✓
- **Effectif de 7** : 12 cahiers et 18 stylos, beaucoup par élève ✓
- **Conclusion** : 21 élèves est l'effectif le plus vraisemblable pour une classe ✓

Réponse. Les diviseurs de $\text{PGCD}(84; 126) = 42$, soit 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 ou 42 — le plus réaliste étant 21 élèves.

Correction de l'exercice 12 - Deux roues de vélo

- **Outil** : la distance doit être un multiple des deux circonférences, donc le **PPCM** ✓
- **Décomposition de 210** : $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ✓
- **Décomposition de 252** : $2^2 \times 3^2 \times 7$ ✓
- **Tous les facteurs au plus grand exposant** : 2^2 , 3^2 , 5 et 7 ✓
- **PPCM** :

$$4 \times 9 \times 5 \times 7 = 1260 \text{ cm}$$
- **Conversion** : 12,60 m ✓
- **Tours de la première roue** : $\frac{1260}{210} = 6$ ✓
- **Tours de la seconde** : $\frac{1260}{252} = 5$ ✓
- **Contrôle** : $6 \times 210 = 1260$ et $5 \times 252 = 1260$ ✓
- **Cohérence** : la plus petite roue fait plus de tours ✓
- **PGCD** : $2 \times 3 \times 7 = 42 \text{ cm}$ ✓
- **Contrôle de la relation** : $42 \times 1260 = 52\,920 = 210 \times 252$ ✓
- **Coïncidences sur 1 km** : $\frac{100\,000}{1260} \approx 79,4$, donc 79 ✓
- **Contrôle** : $79 \times 1260 = 99\,540 \text{ cm}$, soit 995,4 m ✓
- **Tours de la première roue sur 1 km** : $\frac{100\,000}{210} \approx 476,2$ ✓
- **Tours de la seconde** : $\approx 396,8$ ✓
- **Rapport des tours** : $\frac{476,2}{396,8} = 1,2 = \frac{6}{5}$ ✓
- **Conclusion** : les valves se réalignent tous les 12,60 m ✓

Réponse. Tous les 1260 cm (12,60 m) : 6 tours pour la petite roue, 5 pour la grande.

Correction de l'exercice 13 - Reconnaître l'outil

- a) **PGCD** ✓
 - **Raison** : la longueur des morceaux doit **diviser** les deux bandes ✓
 - **Indice dans l'énoncé** : « les plus longs » avec une contrainte de division ✓
 - **Ordre de grandeur attendu** : inférieur à 180 cm ✓
 - **Valeur** : $\text{PGCD}(180; 252) = 36 \text{ cm}$ ✓
- b) **PPCM** ✓
 - **Raison** : on cherche un instant **multiple** des deux durées de tour ✓
 - **Indice** : « repassent ensemble » ✓
 - **Ordre de grandeur attendu** : supérieur aux deux durées ✓
- c) **PGCD** ✓
 - **Raison** : le nombre de sachets doit diviser les deux quantités ✓
 - **Indice** : « sachets identiques » à partir de deux stocks ✓
 - **Valeur** : $\text{PGCD}(60; 84) = 12$ sachets ✓
 - **Contenu** : 5 rouges et 7 bleues ✓
- d) **PPCM** ✓
 - **Raison** : on cherche un **multiple** commun, le plus petit ✓
 - **Indice** : « divisible par » signifie « multiple de » ✓

- **Valeur** : $\text{PPCM}(12; 18) = 36$ ✓
- **Repère infallible à retenir** : si la réponse doit être **plus petite** que les données, c'est le PGCD ✓
- **Et inversement** : si elle doit être **plus grande**, c'est le PPCM ✓
- **Contrôle sur a)** : $36 < 180$ ✓
- **Contrôle sur d)** : $36 > 18$ ✓
- **Coïncidence amusante** : les deux réponses valent 36, mais pour des raisons opposées ✓

Réponse. a) PGCD · b) PPCM · c) PGCD · d) PPCM.

Correction de l'exercice 14 - Un nombre mystère

- **Analyse** : le nombre est divisible par 9 et par 4 ✓
- **Argument clé** : 9 et 4 sont **premiers entre eux** ✓
- **Conséquence** : le nombre est divisible par $9 \times 4 = 36$ ✓
- **Multiples de 36** : 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324 ✓
- **Ceux entre 200 et 300** : 216, 252 et 288 ✓
- **Réponse** :
trois nombres: 216, 252 et 288
- **Conclusion** : il **n'est pas unique** ✓
- **Contrôle de 216** : $2 + 1 + 6 = 9$, divisible par 9 ✓
- **Divisibilité par 4** : les deux derniers chiffres forment $16 = 4 \times 4$ ✓
- **Contrôle de 252** : $2 + 5 + 2 = 9$ ✓
- **Divisibilité par 4** : $52 = 4 \times 13$ ✓
- **Contrôle de 288** : $2 + 8 + 8 = 18$, divisible par 9 ✓
- **Divisibilité par 4** : $88 = 4 \times 22$ ✓
- **Vérification directe** : $\frac{216}{36} = 6$, $\frac{252}{36} = 7$, $\frac{288}{36} = 8$ ✓
- **Piège de l'argument** : divisible par 6 et par 4 ne donnerait **pas** divisible par 24 ✓
- **Contre-exemple** : 12 est divisible par 6 et par 4, mais pas par 24 ✓
- **Raison** : 6 et 4 ne sont pas premiers entre eux ✓
- **Bonne conclusion dans ce cas** : divisible par $\text{PPCM}(6; 4) = 12$ ✓

Réponse. Trois nombres : 216, 252 et 288 (tous multiples de 36) — il n'est donc pas unique.

Correction de l'exercice 15 - Un partage à trois quantités

- **Outil** : le **PGCD** des trois nombres ✓
- **Décomposition de 96** : $2^5 \times 3$ ✓
- **Décomposition de 144** : $2^4 \times 3^2$ ✓
- **Décomposition de 180** : $2^2 \times 3^2 \times 5$ ✓
- **Facteurs communs aux trois** : 2 et 3 ✓
- **Plus petits exposants** : 2^2 et 3^1 ✓
- **PGCD** :
 $\text{PGCD}(96; 144; 180) = 4 \times 3 = 12$
- **Nombre de plateaux** : 12 ✓
- **Canapés par plateau** : $\frac{96}{12} = 8$ ✓

- **Verrines par plateau** : $\frac{144}{12} = 12$ ✓
 - **Mignardises par plateau** : $\frac{180}{12} = 15$ ✓
 - **Contrôles** : $12 \times 8 = 96$, $12 \times 12 = 144$, $12 \times 15 = 180$ ✓
 - **Contrôle d'optimalité** : $\text{PGCD}(8; 12; 15) = 1$ ✓
 - **Interprétation** : on ne peut pas faire plus de plateaux ✓
 - **Pièces par plateau** : $8 + 12 + 15 = 35$ ✓
 - **Contrôle global** : $12 \times 35 = 420 = 96 + 144 + 180$ ✓
 - **Méthode par étapes** : $\text{PGCD}(96; 144) = 48$, puis $\text{PGCD}(48; 180) = 12$ ✓
 - **Cohérence** : le calcul par étapes donne le même résultat ✓
 - **Conclusion** : 12 plateaux de 8 canapés, 12 verrines et 15 mignardises ✓
- Réponse.** 12 plateaux, chacun avec 8 canapés, 12 verrines et 15 mignardises.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : organiser un tournoi

- a) **Outil** : on partage, donc le **PGCD** ✓
- **Décomposition de 60** : $2^2 \times 3 \times 5$ ✓
 - **Décomposition de 96** : $2^5 \times 3$ ✓
 - **Facteurs communs au plus petit exposant** : 2^2 et 3 ✓
 - **PGCD** :

$$\text{PGCD}(60; 96) = 4 \times 3 = 12$$
 - **Nombre d'équipes** : 12 ✓
 - **Juniors par équipe** : $\frac{60}{12} = 5$ ✓
 - **Seniors par équipe** : $\frac{96}{12} = 8$ ✓
 - **Contrôles** : $12 \times 5 = 60$ et $12 \times 8 = 96$ ✓
 - **Joueurs par équipe** : 13 ✓
 - **Contrôle global** : $12 \times 13 = 156 = 60 + 96$ ✓
 - **Contrôle d'optimalité** : 5 et 8 sont premiers entre eux ✓

- b) **Outil** : on synchronise, donc le **PPCM** ✓
- **Décompositions** : $18 = 2 \times 3^2$ et $24 = 2^3 \times 3$ ✓
 - **Tous les facteurs au plus grand exposant** : 2^3 et 3^2 ✓
 - **PPCM** :

$$8 \times 9 = 72 \text{ minutes}$$

- **Conversion** : 1 h 12 min ✓
- **Contrôle** : $72 = 18 \times 4 = 24 \times 3$ ✓
- **Interprétation** : le premier terrain se libère 4 fois, le second 3 fois ✓
- **PGCD des deux durées** : $2 \times 3 = 6$ minutes ✓
- **Contrôle de la relation** : $6 \times 72 = 432 = 18 \times 24$ ✓

- c) **Durée de 9 h à 12 h** : 180 minutes ✓

- **Durée d'un match** : 15 minutes ✓
- **Nombre de matchs par terrain** :

$$\frac{180}{15} = 12 \text{ matchs}$$

- **Contrôle** : $12 \times 15 = 180$ ✓

- **Cohérence** : 15 divise exactement 180, aucun temps perdu ✓
- **Sur deux terrains** : 24 matchs au total ✓
- **Joueurs mobilisés si un match oppose deux équipes** : 12 matchs pour 12 équipes ✓
- **Contrôle de faisabilité** : chaque équipe joue 2 matchs sur les deux terrains ✓

d) **Outil** : on compte les **diviseurs** de 96 ✓

- **Décomposition** : $96 = 2^5 \times 3$ ✓
- **Nombre de diviseurs** : $(5 + 1)(1 + 1)$ ✓
- **Résultat** :

12 façons

- **Liste** : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 ✓
- **Comptage de la liste** : 12 ✓
- **Exemple de répartition** : 6 groupes de 16 seniors ✓
- **Autre exemple** : 8 groupes de 12 ✓
- **Cas dégénérés** : 1 groupe de 96, ou 96 groupes de 1 ✓
- **Répartitions réalistes pour un tournoi** : entre 4 et 12 groupes ✓
- **Diviseurs correspondants** : 4, 6, 8 et 12 ✓
- **Tailles de groupes associées** : 24, 16, 12 et 8 ✓
- **Coïncidence remarquable** : le nombre d'équipes de a), le PPCM de b), le nombre de matchs de c) et le nombre de façons de d) valent tous 12 ✓
- **Contrôle** : 12 équipes, 72 min, 12 matchs, 12 diviseurs ✓

Réponse. a) 12 équipes de 5 juniors et 8 seniors · b) après 72 min (1 h 12) · c) 12 matchs par terrain · d) 12 façons.