Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : partages, emballages et codes

Arithmétique — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La question à se poser avant tout calcul.

L'énoncé dit…	Outil	Pourquoi
« partager sans reste, le plus grand possible »	PGCD	on cherche un diviseur commun
« des paquets identiques les plus nombreux »	PGCD	on divise les deux quantités
« découper en carrés les plus grands »	PGCD	le côté divise les deux dimensions
« se retrouvent en même temps »	multiple commun	le plus petit possible
« le plus petit objet qu'on peut paver »	multiple commun	la dimension est multiple des deux
« combien de façons de ranger »	décomposition	on compte les diviseurs

Calculer par la décomposition. Pour $a = 2^2 \times 3 \times 7$ et $b = 2 \times 3^2 \times 7$, le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun valent

$$2 \times 3 \times 7 = 42 \qquad 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252$$

Nombre de diviseurs de $N = p^a q^b r^c$: $(a+1)(b+1)(c+1)$.

Vérifier une réponse de problème. Trois contrôles, à faire systématiquement :

— le **reste est nul** dans les divisions annoncées ;

— l'**encadrement** : le plus grand diviseur commun est au plus égal au plus petit des deux nombres, le plus petit multiple commun au moins égal au plus grand ;

— l'**ordre de grandeur** est plausible (pas 3 dalles pour un gymnase, pas 4000 sachets avec 50 bonbons).

Rédiger la conclusion. On répond par une phrase complète avec l'**unité** : « il faut 35 dalles de 60 cm de côté », et non « 35 ».

Piège le plus fréquent. Confondre les deux outils. Repère infaillible : si le résultat doit être **plus petit** que les données, c'est le PGCD ; s'il doit être **plus grand**, c'est le plus petit multiple commun.

Correction de l'exercice 1 – Des bouquets identiques

On veut partager toutes les fleurs en bouquets identiques : le nombre de bouquets divise 72 et 120, et l'on cherche le plus grand, c'est-à-dire le PGCD. On décompose : $72 = 2^3 \times 3^2$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

$$\text{PGCD}(72\,;120) = 2^3 \times 3 = 24$$

Le fleuriste peut composer au plus 24 **bouquets**, chacun avec $72 \div 24 = 3$ roses et $120 \div 24 = 5$ tulipes.

Contrôle : $24 \times 3 = 72$ et $24 \times 5 = 120$. On ne peut pas faire mieux, car 3 et 5 sont premiers entre eux. Avec moins de bouquets, il faudrait un diviseur de 24, par exemple 12 bouquets de 6 roses et 10 tulipes.

Réponse. 24 bouquets, chacun avec 3 roses et 5 tulipes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Découper un rectangle en carrés

Le côté des carrés doit diviser exactement 105 et 63 : c’est un diviseur commun, et on le veut le plus grand possible, donc c’est le PGCD. Avec $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $63 = 3^2 \times 7$:

$$\text{PGCD}(105\,;63) = 3 \times 7 = 21 \text{ cm}$$

On découpe des carrés de 21 cm de côté : $105 \div 21 = 5$ dans la longueur et $63 \div 21 = 3$ dans la largeur, soit $5 \times 3 = 15$ carrés.

Contrôle par les aires : $\dfrac{105 \times 63}{21 \times 21} = \dfrac{6615}{441} = 15$. Le plus petit multiple commun (315 cm) n’a pas de sens ici : un carré de 315 cm ne tient pas dans la plaque.

Réponse. Des carrés de 21 cm de côté, et il y en a $5 \times 3 = 15$.

Correction de l’exercice 3 – Trois trains

Les trois trains repartent ensemble après une durée multiple de 25, 40 et 60 minutes ; la plus courte est leur plus petit multiple commun. On décompose : $25 = 5^2$, $40 = 2^3 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, puis on prend chaque facteur avec son plus grand exposant :

$$2^3 \times 3 \times 5^2 = 600 \text{ min}$$

600 minutes font 10 heures : les trains repartiront ensemble à 16 **h**.

Contrôle : $600 = 25 \times 24 = 40 \times 15 = 60 \times 10$. **Piège** : le produit $25 \times 40 \times 60 = 60\,000$ minutes est bien un multiple commun, mais il représente plus de 41 jours.

Réponse. À 16 h, soit 600 minutes (10 h) plus tard.

Correction de l’exercice 4 – Emballer des cubes

On vérifie d’abord que l’arête des cubes divise chaque dimension de la caisse : $48 \div 8 = 6$, $56 \div 8 = 7$ et $72 \div 8 = 9$. Les trois divisions tombent juste : on peut ranger 6 cubes en longueur, 7 en largeur et 9 en hauteur, soit

$$6 \times 7 \times 9 = 378 \text{ cubes}$$

Il ne reste **aucune place**, puisque chaque dimension est remplie exactement.

Contrôle par les volumes : la caisse fait $48 \times 56 \times 72 = 193\,536$ cm³ et un cube $8^3 = 512$ cm³ ; $193\,536 \div 512 = 378$. Avec des cubes de 12 cm, en revanche, 56 n’est pas divisible par 12 et il y aurait de la place perdue.

Réponse. $6 \times 7 \times 9 = 378$ cubes, et il ne reste aucune place (8 divise les trois dimensions).

Correction de l’exercice 5 – Le plus petit cube

On empile des briques identiques dans le même sens pour former un cube : son arête doit être un multiple de 6, de 9 et de 12 cm, la plus petite possible. C’est le plus petit multiple commun : avec $6 = 2 \times 3$, $9 = 3^2$ et $12 = 2^2 \times 3$,

$$2^2 \times 3^2 = 36 \text{ cm}$$

Dans un cube de 36 cm, on place $36 \div 6 = 6$ briques dans un sens, $36 \div 9 = 4$ dans un autre et $36 \div 12 = 3$ en hauteur : il faut $6 \times 4 \times 3 = 72$ briques.

Contrôle par les volumes : $36^3 = 46\,656$ cm³ et une brique fait $6 \times 9 \times 12 = 648$ cm³ ; $46\,656 \div 648 = 72$.

Réponse. Un cube de 36 cm d’arête, avec 72 briques.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Deux tapis roulants

Les marques sont de nouveau alignées quand chaque tapis a fait un nombre entier de tours : la durée cherchée est le plus petit multiple commun de 54 et 90 secondes. Avec $54 = 2 \times 3^3$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$:

$$2 \times 3^3 \times 5 = 270 \text{ s}$$

Elles se réalignent après 270 s, soit 4 min 30 s. Le premier tapis a alors fait $270 \div 54 = 5$ tours et le second $270 \div 90 = 3$ tours.

Contrôle : $5 \times 54 = 270$ et $3 \times 90 = 270$. Le tapis le plus rapide fait le plus de tours, ce qui est cohérent.

Réponse. Après 270 s (4 min 30 s) : 5 tours pour le premier, 3 pour le second.

Correction de l’exercice 7 – Nombre de rangements

Un rangement en rangées identiques correspond à une écriture
96 = (nombre de rangées) × (livres par rangée) : il y a autant de rangements que de diviseurs de 96. On les écrit par paires :

$$96 = 1 \times 96 = 2 \times 48 = 3 \times 32 = 4 \times 24 = 6 \times 16 = 8 \times 12$$

Les diviseurs sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 et 96 : il y a 12 **rangements** possibles.

Les rangées de plus de 10 et moins de 20 livres correspondent aux diviseurs 12 et 16 : 8 rangées de 12 livres ou 6 rangées de 16 livres.

Réponse. 12 rangements possibles ; deux donnent des rangées entre 10 et 20 : 8×12 et 6×16.

Correction de l’exercice 8 – Code à chiffres distincts

On construit le code chiffre par chiffre. Le premier chiffre peut être choisi de 5 façons ; le deuxième, différent du premier, de 4 façons ; le troisième de 3 façons. Le nombre de codes est

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

Un nombre est multiple de 5 quand il se termine par 0 ou 5 ; ici, il n’y a pas de 0, donc le dernier chiffre doit être 5. Il reste alors 4 choix pour le premier chiffre et 3 pour le deuxième : $4 \times 3 = 12$ codes sont des multiples de 5.

Contrôle : $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$, ce qui est logique puisque chacun des cinq chiffres a autant de chances d’être en dernière position.

Réponse. $5 \times 4 \times 3 = 60$ codes, dont 12 sont multiples de 5.

Correction de l’exercice 9 – Partager une somme d’argent

La somme par enveloppe doit diviser 252 et 378. Pour utiliser le moins d’enveloppes possible, on la veut la plus grande possible : c’est le PGCD. Avec $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ et $378 = 2 \times 3^3 \times 7$:

$$\text{PGCD}(252\,;378) = 2 \times 3^2 \times 7 = 126\ €$$

On met 126 € par enveloppe : $252 \div 126 = 2$ enveloppes pour le premier tas et $378 \div 126 = 3$ pour le second.

Contrôle : $5 \times 126 = 630 = 252 + 378$. Avec 63 € par enveloppe (un autre diviseur commun), il en faudrait $4 + 6 = 10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 126 € par enveloppe : 2 enveloppes pour 252 € et 3 pour 378 €.

Correction de l’exercice 10 – Fractions d’un chantier

En deux jours, l’équipe a peint $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$ du mur. Le plus petit dénominateur commun est 40 : $\frac{15}{40}+\frac{16}{40}=\frac{31}{40}$. Il reste le complément à 1 :

$$1-\frac{31}{40}=\frac{9}{40}$$

Cette fraction est irréductible ($9=3^2$ et $40=2^3\times5$). Sur un mur de 40 m², il reste $\frac{9}{40}\times40=9$ m² à peindre.

Contrôle : les deux jours représentent 15 m² et 16 m², et $15+16+9=40$ m².

Réponse. Il reste $\frac{9}{40}$ du mur, soit 9 m².

Correction de l’exercice 11 – Distribuer sans reste

Chaque élève reçoit le même nombre de cahiers et le même nombre de stylos, sans reste : l’effectif de la classe divise 84 et 126. Les diviseurs communs de deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD. Avec $84=2^2\times3\times7$ et $126=2\times3^2\times7$, on trouve PGCD $=2\times3\times7=42$, dont les diviseurs sont

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 14,\ 21 \text{ et } 42$$

L’effectif le plus réaliste pour une classe est 21 élèves : chacun reçoit $84\div21=4$ cahiers et $126\div21=6$ stylos. Avec 14 élèves, ce serait 6 cahiers et 9 stylos chacun.

Réponse. Les diviseurs de PGCD(84 ; 126) = 42, soit 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 ou 42 — le plus réaliste étant 21 élèves.

Correction de l’exercice 12 – Deux roues de vélo

Chaque tour de roue fait avancer le vélo d’une circonférence. Les deux valves sont en bas en même temps quand la distance parcourue est un multiple de 210 et de 252 cm ; la plus courte est leur plus petit multiple commun. Avec $210=2\times3\times5\times7$ et $252=2^2\times3^2\times7$:

$$2^2\times3^2\times5\times7=1260 \text{ cm}$$

Les valves se retrouvent en bas tous les 12,60 m. La petite roue a alors fait $1260\div210=6$ tours et la grande $1260\div252=5$ tours.

Contrôle : $6\times210=5\times252=1260$.

Réponse. Tous les 1260 cm (12,60 m) : 6 tours pour la petite roue, 5 pour la grande.

Correction de l’exercice 13 – Reconnaître l’outil

Pour choisir l’outil, on se demande si la réponse doit être plus petite que les données (on **partage** : PGCD) ou plus grande (on **attend une coïncidence** : multiple commun).

a) **PGCD** : la longueur des morceaux doit diviser les deux bandes, et on la veut la plus grande ; elle vaut PGCD(180 ; 252) = 36 cm.

b) **Multiple commun** : on attend l’instant où chacun a fait un nombre entier de tours, c’est un multiple commun des deux durées.

c) **PGCD** : le nombre de sachets doit diviser 60 et 84 ; on trouve PGCD(60 ; 84) = 12 sachets de 5 rouges et 7 bleues.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) **Multiple commun** : un nombre divisible par 12 et 18 est un multiple commun, le plus petit étant

$$36$$

Les réponses de a) et d) valent toutes deux 36, mais pour des raisons opposées.

Réponse. a) PGCD · b) multiple commun · c) PGCD · d) multiple commun.

Correction de l’exercice 14 – Un nombre mystère

Le nombre est divisible par 9 et par 4. Ces deux nombres n’ont aucun facteur premier commun ($9 = 3^2$ et $4 = 2^2$), donc le nombre est divisible par leur produit 36. On cherche les multiples de 36 entre 200 et 300 :

$$36 \times 6 = 216 \qquad 36 \times 7 = 252 \qquad 36 \times 8 = 288$$

Il y a **trois** nombres qui conviennent : le nombre n’est pas unique.

Contrôle de 252 : la somme des chiffres vaut 9 (divisible par 9) et $52 = 4 \times 13$ (divisible par 4). **Attention** : divisible par 6 et par 4 ne donnerait pas divisible par 24 (12 est un contre-exemple), car 6 et 4 ont le facteur 2 en commun.

Réponse. Trois nombres : 216, 252 et 288 (tous multiples de 36) — il n’est donc pas unique.

Correction de l’exercice 15 – Un partage à trois quantités

Le nombre de plateaux doit diviser 96, 144 et 180, et on le veut le plus grand possible : c’est le PGCD des trois nombres. On décompose : $96 = 2^5 \times 3$, $144 = 2^4 \times 3^2$ et $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Les facteurs communs aux trois sont 2 et 3, avec les plus petits exposants 2^2 et 3^1 :

$$\mathrm{PGCD}(96\,;144\,;180) = 2^2 \times 3 = 12$$

Le traiteur compose 12 **plateaux**, chacun avec $96 \div 12 = 8$ canapés, $144 \div 12 = 12$ verrines et $180 \div 12 = 15$ mignardises.

Contrôle : $12 \times (8 + 12 + 15) = 12 \times 35 = 420 = 96 + 144 + 180$.

Réponse. 12 plateaux, chacun avec 8 canapés, 12 verrines et 15 mignardises.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : organiser un tournoi

a) Les équipes identiques se partagent tous les joueurs : leur nombre divise 60 et 96, au maximum leur PGCD. Avec $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $96 = 2^5 \times 3$, on obtient $\mathrm{PGCD}(60\,;96) = 2^2 \times 3 = 12$: 12 équipes de $60 \div 12 = 5$ juniors et $96 \div 12 = 8$ seniors.

b) Les terrains se libèrent ensemble après un multiple de 18 et de 24 minutes, au plus tôt après leur plus petit multiple commun :

$$2^3 \times 3^2 = 72 \text{ min}$$

soit 1 h 12 min.

c) De 9 h à 12 h, il y a 180 minutes : un terrain accueille $180 \div 15 = 12$ matchs.

d) Répartir 96 seniors en groupes identiques revient à choisir un diviseur de $96 = 2^5 \times 3$. Il y en a 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, donc 12 façons.

Réponse. a) 12 équipes de 5 juniors et 8 seniors · b) après 72 min (1 h 12) · c) 12 matchs par terrain · d) 12 façons.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).